12

Alexander Ziwet

ANGELO GENOCCHI

DIFFERENTIALRECHNUNG

UND

GRUNDZÜGE DER INTEGRALRECHNUNG

HERAUSGEGEBEN VON

GIUSEPPE PEANO

AUTORISIERTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

G. BOHLMANN UND A. SCHEPP

MIT EINEM VORWORT VON A. MAYER

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1899

Vorwort.

Das im Herbst 1884 von G. Peano herausgegebene Werk: Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale bot nicht bloſs ein mustergültiges Beispiel präciser Darstellung und strenger Schluſsweise dar, dessen günstiger Einfluſs in fast allen seitdem erschienenen gröſseren Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung unverkennbar zu Tage tritt, es gab namentlich auch durch die Hervorhebung alt eingewurzelter Irrtümer in den vorangestellten Noten der Wissenschaft selbst den Anstoſs zu neuer fruchtbarer Entwickelung. Allerdings waren, wie in der Besprechung des Werkes im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1884, p. 223 auffällig stark betont wird, viele der gerügten Fehler auch damals schon nicht unbekannt, wie denn in Deutschland im besonderen bereits Harnack's Elemente der Differential- und Integralrechnung und die Einleitung in die Differential- und Integralrechnung von Pasch eine strengere Richtung eingeschlagen hatten. Wo aber die betreffenden Bemerkungen schon an anderen Orten gemacht waren, geben die Noten auch immer die Originalquellen gewissenhaft an, und man findet auch Anmerkungen ohne jeden solchen Litteraturnachweis. Vor allen die Note zu den Nr. 133—136 brachte entschieden etwas vollständig Neues und dieser gewichtige Einwurf, den weder das Jahrbuch, noch auch das Referat im Bulletin des sciences mathématiques, 1885, p. 170 erwähnt, den aber Harnack sofort in den Berichtigungen zum ersten Bande seiner deutschen Bearbeitung von Serret's Cours de calcul différentiel et intégral aufnahm, zeigte unwiderleglich, daſs die ganze frühere Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums einer durchgreifenden

Umgestaltung bedurfte. Peano begnügte sich aber nicht damit, an dem denkbar einfachsten Beispiele die Fehlerhaftigkeit der alten Theorie bloſszustellen, sondern gab auch von dem, was von ihr noch richtig bleibt, in der Nr. 135 den ersten strengen Beweis. Wenn nun gleich Ludwig Scheeffer unabhängig von Peano seinerseits die Mängel dieser Theorie durchschaut hatte, so benutzt doch auch er (Mathematische Annalen XXXV, p. 545) das Peano'sche Beispiel, um an ihm die Fehlschlüsse einer der gebräuchlichsten früheren Begründungsarten klar zu machen. Im Grunde gehen daher all die schönen und zum groſsen Teil fundamentalen Arbeiten von Scheeffer, Stolz und V. von Dantscher, die neue strenge Theorien des Maximums und Minimums der Funktionen zweier Variabelen entwickeln und ihre Ausdehnnng auf Funktionen von n Veränderlichen vorbereiten, schlieſslich zunächst auf das Peano'sche Buch.

Von einem Werke, das nicht nur von althergebrachten Fehlern und Ungenauigkeiten sich zum ersten Male vollständig frei machte, sondern überdies auch so einschneidend in ein wichtiges und noch dazu vorher für ganz elementar gehaltenes Gebiet eingriff, eine gute Übersetzung zu haben, war ein längst gefühltes Bedürfnis, und das Erscheinen einer autorisierten deutschen Ausgabe kann daher, auch ganz abgesehen von den wertvollen neuen Hinzufügungen des Verfassers, dem mathematischen Publikum nur hochwillkommen sein. Es ist ja nicht ein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne, da es so zu sagen nur auserlesene Kapitel aus dem groſsen Gebiete der Differential- und Integralrechnung behandelt, vor allem kein Lehrbuch für den Anfänger, der für volle Strenge noch das richtige Verständnis nicht haben kann. Aber bei der ausgezeichnet klaren Sprache des Buches wird jeder, der bereits mit den Elementen der Analysis vertraut ist, sich leicht in dasselbe hineinlesen und aus ihm nachhaltigen Nutzen und ungewöhnliche Befriedigung gewinnen.

Leipzig, Ende Januar 1899.

A. Mayer.

Vorwort der Übersetzer.

Von verschiedenen Seiten wurde der Wunsch nach einer deutschen Übersetzung des Genocchi-Peano ausgesprochen: so von Herrn A. Mayer in Leipzig und Herrn J. Knoblauch in Berlin. Einer Aufforderung des Verlegers folgend unterzog sich der Erst-Unterzeichnete dieser Aufgabe. Von diesem stammt auch die Übersetzung des Textes; die der Anmerkungen und Anhänge übernahm der Zweit-Unterzeichnete. Von einer wesentlichen Erweiterung der in den Anmerkungen gegebenen historischen Notizen wurde Abstand genommen. Es sei in dieser Hinsicht auf die einschlägigen Abschnitte der von H. Burkhardt und F. Meyer herausgegebenen mathematischen Encyclopädie verwiesen.

Die Herren G. Peano und A. Mayer haben die deutsche Ausgabe freundlichst unterstützt; Herr A. Mayer durch Hinzufügung des Vorwortes, Herr G. Peano durch Abfassung der fünf Anhänge und Teilnahme an den Korrekturen.

Die Unterzeichneten sind nicht nur der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, sondern auch den Verlegern des italienischen Originales, den Herrn Fratelli Bocca, wegen ihres Entgegenkommens verpflichtet.

Zum Schlufs sei den Herren Liebmann, Prigge und Müller für ihre Unterstützung bei den Korrekturen, Herrn Liebmann aufserdem noch für die Anfertigung des alphabetischen Sachregisters bestens gedankt.

Göttingen und Wiesbaden, Ende Januar 1899.

G. Bohlmann. A. Schepp.

Inhalt.

Differentialrechnung.

Differential-Rechnung.

Erstes Kapitel.

Von den Funktionen.

§ 1. Zahlen und Gröfsen.

1. Die Gröfsen werden in der Analysis durch Zahlen gemessen und dargestellt. Eine *ganze* Zahl entsteht durch Vereinigung mehrerer Einheiten, ein Bruch durch Vereinigung von Einheiten und aliquoten Teilen von Einheiten. Die ganzen Zahlen und die Brüche heifsen zusammengenommen die *rationalen* Zahlen.

2. Eine rationale Zahl a teilt alle rationalen Zahlen in zwei Klassen: in solche, die kleiner sind als a und solche, die nicht kleiner sind als a (oder auch in solche, die nicht gröfser sind als a und die gröfser sind als a). Jede Zahl der ersten Klasse ist kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse. Umgekehrt, sind alle rationalen Zahlen in zwei Klassen geteilt, sodafs jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede der zweiten, so *sagen* wir, indem wir den Zahlbegriff erweitern, dafs es eine Zahl giebt, die weder kleiner ist als die Zahlen der ersten Klasse, noch gröfser als die der zweiten; giebt es keine rationale Zahl, die sich dieser Eigenschaft erfreut, so nennen wir die so definierte Zahl *irrational*. Sie wird gröfser sein als alle Zahlen der ersten Klasse und kleiner als alle der zweiten. Zwei irrationale Zahlen heifsen gleich, wenn sie mit Hülfe derselben Klasse definiert sind, oder wenn jede rationale Zahl, die kleiner ist als die erste, auch kleiner ist als die zweite und umgekehrt; die irrationale Zahl a heifst kleiner

als b, wenn es rationale Zahlen giebt, die gröfser sind als a und kleiner als b.

3. Bis jetzt betrachteten wir die Zahlen nur ihrem absoluten Werte nach; nehmen wir noch den Begriff des Vorzeichens hinzu, so erhalten wir die *positiven* und *negativen* Zahlen. Der Leser mufs bereits die Art kennen, in der man auf sie die algebraischen Operationen anwendet, und die Gesetze, denen sie gehorchen. Das Vorhergehende hat lediglich den Zweck, den Begriff der irrationalen Zahl festzustellen, der für unsere Untersuchungen fundamental ist. Erst später werden wir die imaginären Zahlen hinzuziehen.

4. Damit die Gröfsen irgend eines Systems (durch positive Zahlen) gemessen werden können, sind folgende fünf Bedingungen erforderlich:

1) In dem System ist Gleichheit und Ungleichheit definiert,

2) bei zwei ungleichen Gröfsen kann man immer die gröfsere von der kleineren unterscheiden,

3) man kann addieren und die kleinere Gröfse von der gröfseren subtrahieren,

4) jede Gröfse kann man in gleiche Teile teilen,

5) jede Gröfse A übersteigt jede andere Gröfse B, wenn sie eine hinreichende Anzahl von Malen zu sich selbst addiert wird; daraus folgt dann, dafs ein Bruchteil von B kleiner gemacht werden kann, als jede andere Gröfse A.

Man pflegt eine Messung in der Weise auszuführen, dafs man aus dem gegebenen System nach Willkür irgend eine Gröfse U herausnimmt und sie die *Mafseinheit* nennt. Kann man die Gröfsen addieren und durch ganze Zahlen dividieren, so kann man alle Gröfsen nU bilden, wo n eine rationale Zahl bedeutet. Es sei nun A irgend eine Gröfse des Systems. Entweder giebt es dann einen Wert von $n = a$, sodafs $A = aU$, in diesem Falle ist a die Zahl, welche A mifst.

Giebt es keinen solchen Wert von n, so giebt es gemäfs unserer 5ten Voraussetzung in dem Systeme doch solche Werte von n, für welche $nU < A$, und andere, für welche $nU > A$ ist; die (irrationale) Zahl, welche gröfser ist als die Werte n der ersten und kleiner als die Werte n der zweiten Klasse, ist dann diejenige Zahl, welche A mifst. Zwei ungleiche

Grölsen A und B werden auch durch zwei ungleiche Zahlen a und b gemessen. In der That, ist $A < B$, so wird die Differenz $B - A$ durch eine positive (von null verschiedene) Zahl gemessen; aber diese Zahl hat den Wert $b - a$, also ist $b - a$ positiv, und a und b sind ungleich.

5. Unter den Grölsen, welche in den verschiedenen Wissenschaften vorkommen, genügen einige offenbar den vorstehenden Bedingungen, und sind melsbar; so z. B. die Längen von geradlinigen Strecken, die Zeitintervalle u. s. w. Andere wie Flächeninhalt, Länge eines Kurvenbogens u. s. w. erfordern, um gemessen werden zu können, die Aufstellung geeigneter Definitionen und Beweise.

§ 2. **Funktionen und Grenzwerte.**

6. In den Fragen, die wir behandeln werden, finden wir Zahlen, denen bestimmte feste Werte zuzuerteilen sind und die *Konstante* heilsen, wir finden andere, die verschiedene Werte annehmen können, sie heilsen *Veränderliche*. Unter den Veränderlichen giebt es solche, denen wir willkürlich der Reihe nach verschiedene Werte zuerteilen können, sie heilsen *unabhängige Veränderliche*; die Werte von anderen hinwiederum sind durch die Werte bestimmt, die den ersteren Veränderlichen gegeben sind, sie heilsen *abhängige Veränderliche* oder *Funktionen* der unabhängigen Veränderlichen.

Wir werden zuerst die Funktionen von einer einzigen unabhängigen Veränderlichen behandeln; wir werden sagen:

Eine Funktion y von x ist in einem Intervalle (a, b) gegeben, wenn jedem Werte von x zwischen a und b ein einziger bestimmter Wert von y entspricht.

Dabei wollen wir übereinkommen, dals wir unter dem Intervall (a, b) die Gesamtheit aller Zahlen zwischen a und b *einschlieſslich der Grenzen* a und b verstehen wollen, solange nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist.

Gleichgültig ist hierbei das Mittel, welches die Zuordnung bestimmt.

Beispielsweise ist x^2 eine Funktion von x, die für jeden Wert von x definiert und daher in jedem Intervalle gegeben ist; $\sqrt{x}$ ist für alle positiven Werte von x gegeben, wenn man der Wurzel das positive Zeichen giebt. Hingegen ist $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}$ eine Funktion von x, die nur für ganze positive Werte der Veränderlichen definiert ist, u. s. w.

Man bezeichnet, dafs y eine Funktion von x ist, indem man schreibt $y=f(x)$. Dabei bedeutet $f(a)$ den Wert der Funktion, welcher dem Werte a der Veränderlichen entspricht. Andere Funktionen von x stellt man durch $\varphi(x)$, $f'(x)$, $\cdots$ dar. Eine ähnliche Bezeichnungsweise dient dazu, die Funktionen von mehreren Veränderlichen zu bezeichnen; so bedeutet $F(x, y, z)$ eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, z u. s. w.

7. *Man sagt $y=f(x)$ erhält den Grenzwert A, wenn x nach a konvergiert, sobald man zu einer beliebig klein gegebenen positiven Zahl ε eine positive Zahl h bestimmen kann, sodafs $|f(x)-A|$ kleiner ist als ε für jedes $x-a$, das absolut kleiner ist als h.*

Gleichbedeutend hiermit ist die Ausdrucksweise: *y hat an der Stelle $x=a$ den Grenzwert A*, oder, wenn die Stelle selbstverständlich ist: *y konvergiert nach A.*

Die beiden Striche $|\,|$ bedeuten dabei hier und in der Folge, dafs die von den Strichen eingeschlossene Gröfse ihrem absolutem Werte nach, d. h. mit positivem Zeichen zu nehmen ist.

Man sagt, dafs $y=f(x)$ den Grenzwert A erhält, wenn x unbegrenzt wächst, sobald man zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl N bestimmen kann, so dafs für jedes $x>N$ der Ausdruck $|f(x)-A|<\varepsilon$ wird.

Dafs $f(x)$ den Grenzwert A erhält, wenn x nach a konvergiert oder wenn x unbegrenzt wächst, pflegt man dadurch zu bezeichnen, dafs man schreibt $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$, beziehungsweise $\lim\limits_{x=\infty} f(x)=A$, oder noch einfacher $\lim f(x)=A$, wenn die Art, wie x variirt, selbstverständlich ist.

Wenn keine Zahl A vorhanden ist, welche sich der genannten Eigenschaft erfreut, so sagt man, dafs $f(x)$ überhaupt keinen Grenzwert erhält, wenn x nach a konvergiert, beziehungsweise, wenn x unbegrenzt wächst.

Beispielsweise erhält x^2 den Grenzwert 0, wenn x gegen null konvergiert, denn für jedes positive ε wird $|x^2-0|=x^2<\varepsilon$, sobald $x<|\sqrt{\varepsilon}|$ ist. $\sqrt{x}$ erhält ebenfalls den Grenzwert 0, wenn x gegen null konvergiert, weil für jeden Wert von

$x < \varepsilon^2$ der Ausdruck $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ wird. $1 + \frac{1}{x}$ erhält den Grenzwert 1, wenn x unbegrenzt wächst; denn die Differenz zwischen dem Funktionswert und 1, d. h. $\frac{1}{x}$, wird kleiner als ε für jeden Wert von $x > \frac{1}{\varepsilon}\cdot$ Hat $f(x)$ einen konstanten Wert l für alle Zahlen x, die hinreichend nahe an a liegen, oder hinreichend grofs sind, so ist der Grenzwerth von $f(x)$ der konstante Wert l, denn die Differenz $|f(x) - l|$ ist für diese Werte von x null und daher kleiner als jede positive Zahl ε. Dies drückt man aus, indem man sagt, dafs eine Konstante ihren eigenen Wert zum Grenzwert hat, u. s. w.

Damit man von einem Grenzwert von y für $x = a$ oder für unbegrenzt wachsendes x sprechen kann, mufs die Funktion gegeben sein für ein System von Werten x, die beliebig nahe an a liegen, oder für beliebig grofse x. Trotzdem braucht die Funktion nicht für $x = a$ gegeben zu sein. Ist $f(a)$ gegeben und sprechen wir vom Grenzwert an der Stelle a, so schliefsen wir den Wert a von denen aus, welche x annehmen kann. Hieraus folgt, dafs $\lim\limits_{x=a} f(x)$ von $f(a)$ verschieden sein kann, weil $f(a)$ nicht von den Werten abhängt, welche $f(x)$ in beliebiger Nähe von a annimmt; von ihnen allein aber hängt der Grenzwert von $f(x)$ ab.

8. *Man sagt, dafs die Funktion $f(x)$ stetig ist an der Stelle $x = x_0$, wenn $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.*

Erinnern wir uns der Definition des Grenzwertes, so besagt die eben aufgestellte Definition: „Man sagt, $f(x)$ ist stetig an der Stelle $x = x_0$, wenn man zu einer beliebig klein gegebenen positiven Zahl ε ein Intervall $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ bestimmen kann, sodafs für jeden Wert von x in ihm

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

wird.“

Eine Funktion heifst stetig in einem Intervalle (a, b), wenn sie für alle Werte von x in diesem Intervalle stetig ist.

Eine Funktion, die nicht stetig ist, heifst *unstetig*; daher ist $f(x)$ unstetig für $x = x_0$, wenn $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ entweder überhaupt keinen Grenzwert, oder doch einen von $f(x_0)$ verschiedenen Grenzwert hat.

§ 3. Sätze über Grenzwerte.

9. *Satz I. Eine Funktion kann nicht gleichzeitig zwei verschiedene Grenzwerte erhalten.*

Nehmen wir in der That das Gegenteil an und setzen voraus, dafs eine Zahl P, die eine Funktion von x ist, gleichzeitig zwei verschiedene Grenzwerte erhält. Setzt man $P = A + \alpha$, $P = B + \beta$, so sind α und β die Differenzen zwischen P und seinen Grenzwerten A und B und können daher beliebig klein gemacht werden. Aus der Gleichung $A + \alpha = B + \beta$ folgt aber $A - B = \beta - \alpha$; diese Gleichung ist aber unmöglich, wenn A und B verschieden sind; denn das Glied linker Hand ist konstant und nicht null, das Glied rechter Hand hingegen kann beliebig klein gemacht werden. Dabei mag hier ein für allemal bemerkt werden, dafs wir sagen, eine Zahl kann beliebig klein gemacht werden, wenn man ihren absoluten Wert beliebig klein machen kann.

10. *Satz II. Haben mehrere Funktionen einen bestimmten Grenzwert, so hat auch ihre Summe einen bestimmten Grenzwert, der gleich der Summe der Grenzwerte der einzelnen Summanden ist.*

In der That, es sei $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$; $y_1, y_2, \cdots y_n$ seien Funktionen einer Veränderlichen x, welche für $x = a$ die Grenzwerte $a_1, a_2, \cdots a_n$ haben mögen. Setzt man:

$$y_1 = a_1 + \alpha_1, \quad y_2 = a_2 + \alpha_2, \quad \cdots \quad y_n = a_n + \alpha_n,$$

so sind $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ Zahlen, die beliebig klein gemacht werden können. Durch Addition erhält man:

$$y = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

oder

$$y - (a_1 + \cdots + a_n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Fixieren wir eine beliebig kleine Zahl ε und wählen x so, dafs jedes α absolut kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{n}$, so wird, da der absolute Betrag einer Summe bekanntlich nie gröfser ist als die Summe der absoluten Beträge ihrer Summanden,

$$|\alpha_1 + \cdots + \alpha_n| < \varepsilon, \quad |y - (a_1 + \cdots + a_n)| < \varepsilon,$$

oder

$$\lim y = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

11. *Satz III. Haben mehrere Funktionen einen bestimmten Grenzwert, so hat auch ihr Produkt einen bestimmten Grenzwert und dieser ist gleich dem Produkte der Grenzwerte der einzelnen Faktoren.*

Es sei $y = PQ$; P und Q seien Funktionen von x, welche bestimmte Grenzwerte A und B haben; dann ist $P = A + \alpha$, $Q = B + \beta$, wo α und β beliebig klein gewählt werden können. Durch Substitution ergiebt sich:

$$y = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta$$

und also

$$y - AB = A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

Fixieren wir eine positive Zahl ε und geben x einen Wert, für welchen $|A\beta| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\text{d. h. } |\beta| < \frac{\varepsilon}{3|A|}\right)$, $|B\alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\text{d. h. } |\alpha| < \frac{\varepsilon}{3|B|}\right)$ und schliefslich $|\alpha\beta| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\text{od. } |\alpha| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}},\ |\beta| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right)$ wird, so ist klar, dafs α und β allen diesen Bedingungen genügen können und dafs $|y - AB| < \varepsilon$ wird oder $\lim y = AB$.

Ist $y = PQRS \cdots$, so wird $\lim y = \lim P \lim QRS \cdots = \lim P \lim Q \lim RS \cdots = \cdots = \lim P \lim Q \lim R \cdots$. Also ist der Satz für beliebig viele Faktoren erwiesen.

12. *Satz IV. Haben zwei Funktionen einen bestimmten Grenzwert, so hat auch ihr Quotient einen bestimmten Grenzwert, sobald der Grenzwert des Divisors nicht null ist. Der Grenzwert des Quotienten ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte.*

In der That, es sei $y = \frac{P}{Q}$, $\lim P = A$ und $\lim Q = B$, wo $B \neq 0$. Setzt man $P = A + \alpha$, $Q = B + \beta$, so wird $\frac{P}{Q} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)}$. Wir können β absolut kleiner als eine positive Zahl $h < |B|$ voraussetzen; dann wird $|B + \beta| > |B| - h$ und der absolute Wert des Bruches $< \frac{|\alpha|\,|B| + |\beta|\,|A|}{|B|\,(|B| - h)}$. Diesen Ausdruck kann man aber immer kleiner als eine beliebig kleine positive Zahl ε wählen, wenn man $\frac{|\alpha|\,|B|}{|B|\,(|B| - h)} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{|\beta|\,|A|}{|B|\,(|B| - h)} < \frac{\varepsilon}{2}$ oder

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon\,|B|\,(|B| - h)}{2\,|B|}, \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{B}{A}\right|(|B| - h)$$

nimmt. Daher wird $\lim \frac{P}{Q} = \frac{A}{B} = \frac{\lim P}{\lim Q}$.

13. *Satz V. Ist eine Funktion immer zwischen zwei anderen enthalten, die nach demselben Grenzwerte konvergieren, so konvergiert auch jene Funktion nach demselben Grenzwerte.*

In der That, sind P und Q zwei Veränderliche mit dem Grenzwerte A, und ist R zwischen P und Q enthalten, so ist auch $R - A$ zwischen $P - A$ und $Q - A$ enthalten. Macht man $P - A$ und $Q - A$ absolut kleiner als ε, so wird auch $|R - A| < \varepsilon$ oder R hat den Grenzwert A.

14. *Satz VI. Wenn mit beständig wachsendem x auch y beständig wächst, aber immer kleiner als eine Zahl A bleibt, so erhält y einen Grenzwert, der entweder A selbst ist oder eine Zahl, die kleiner ist als A.*

In der That, alle Zahlen kann man in zwei Klassen teilen: Zahlen, die von Werten y übertroffen werden können und Zahlen, welche von ihnen nicht übertroffen werden können. Zur ersteren gehören die Zahlen, welche kleiner sind als Werte von y, zur zweiten die Zahl A. Jede Zahl der ersten Klasse ist kleiner als jede Zahl der zweiten. Daher bestimmen diese beiden Klassen eine Zahl L, welche von Werten y nie übertroffen wird, der Gestalt, dafs jede Zahl, die kleiner ist als L, von Werten y übertroffen wird. Ich behaupte, dafs L der Grenzwert ist, welchen y mit wachsendem x erreicht. In der That, fixiere ich irgend eine positive Zahl ε, und sage ich, die Zahl $L - \varepsilon$ wird von irgend einem Werte y und daher auch von den folgenden Werten y übertroffen, so heifst dies dasselbe, als wenn ich sage, dafs die Differenz $L - y$ beständig kleiner als ε bleibt von einem bestimmten Werte von x an, für den $L - \varepsilon < y < L$ ist; wie zu beweisen war.

15. *Satz VII. Wenn $y = f(x)$ mit unbegrenzt wachsendem x einen bestimmten Grenzwert erhält, so kann man zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl N bestimmen, sodafs die Differenz $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ wird für alle Wertepaare x, x', die N übersteigen.*

In der That, es sei A der Grenzwert von y. Man bestimme N so, dafs für jeden Wert von $x \geqq N$ der Ausdruck $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ wird und es sei x' ein anderer Wert $\geqq N$; dann ist auch $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, w. z. bw. w.

Satz VIII. Wenn man zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl N bestimmen kann, so dafs die Differenz $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ wird für alle Wertepaare (x, x'), die N übersteigen, so erhält $f(x)$ einen bestimmten Grenzwert, wenn x unbegrenzt wächst.

In der That, erteilen wir ε die Reihe von unbegrenzt abnehmenden Werten: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots$ und es seien $N_1 N_2 N_3 \cdots$ die entsprechenden Werte von N. Geben wir x einen Wert $> N_1$, so wird $|f(x) - f(N_1)| < \varepsilon_1$ und $f(x)$ ist zwischen $a_1 = f(N_1) + \varepsilon_1$ und $b_1 = f(N_1) - \varepsilon_1$ enthalten. Geben wir x einen Wert $> N_2$, so ist $f(x)$ zwischen $f(N_2) + \varepsilon_2$ und $f(N_2) - \varepsilon_2$ enthalten. Geben wir daher x Werte, die gröfser sind als N_1 und N_2, so wird $f(x)$ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen a_1 und $f(N_2) + \varepsilon_2$, diese möge a_2 heifsen. Es wird gröfser als die gröfsere der beiden Zahlen b_1 und $f(N_2) - \varepsilon_2$, diese möge b_2 heifsen. Für diese Werte von x wird also $a_2 > f(x) > b_2$ und $a_1 \geqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$, $a_2 - b_2 \leqq 2\varepsilon_2$. In ähnlicher Weise wird für alle Werte von $x > N_1, N_2, N_3$ $f(x)$ zwischen der kleineren der beiden Zahlen a_2 und $f(N_3) + \varepsilon_3$ enthalten sein, die a_3 heifsen möge, und zwischen der gröfseren der beiden b_2 und $f(N_3) - \varepsilon_3$, die b_3 heifsen möge. Fährt man so fort, so erhält man eine Reihe von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \cdots$, welche beständig abnehmen und eine andere Reihe von Zahlen $b_1, b_2, b_3, \cdots$, welche beständig zunehmen. Dabei sind die ersteren beständig gröfser als die letzteren und daher erhalten a und b bestimmte Grenzwerte; diese sind aber gleich, weil wegen $a_n - b_n \leqq 2\varepsilon_n$ auch $\lim a_n = \lim b_n$ wird. Also erhält auch $f(x)$, das immer zwischen den a und b enthalten ist, denselben Grenzwert, w. z. bew. w.

16. Eine Veränderliche heifst unendlich klein, wenn sie zur Grenze die Null hat. In einer und derselben Frage können verschiedene unendlich kleine Zahlen auftreten, und man pflegt sie unter einander zu vergleichen. Man nennt zwei Zahlen α und β unendlich klein von derselben Ordnung, wenn ihr Verhältnis einen bestimmten Grenzwert hat, der von null verschieden ist. Man sagt α ist von geringerer Ordnung unendlich klein als β, wenn $\frac{\beta}{\alpha}$ zum Grenzwert null hat; daher sagt man, dafs α von

höherer Ordnung unendlich klein wird, wenn $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ unbegrenzt wächst.

Unter den verschiedenen unendlich kleinen Zahlen, welche in einer bestimmten Aufgabe auftreten, pflegt man eine willkürlich auszuwählen, die man unendlich kleine Zahl 1^{ter} Ordnung nennt, diese sei h. Man sagt nun, dafs eine andere unendlich kleine Zahl α unendlich klein von der n^{ten} Ordnung wird, wenn das Verhältnis $\frac{\alpha}{h^n}$ an der Stelle $h = 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, der von null verschieden ist. So wird beispielsweise $\sin x$ unendlich klein von der 1^{ten} Ordnung, wenn man x zur unendlich kleinen Zahl 1^{ter} Ordnung nimmt; denn $\frac{\sin x}{x}$ hat für $x = 0$, wie wir sehen werden, den Grenzwert 1. Hingegen wird $1 - \cos x$ unendlich klein von 2^{ter} Ordnung; denn

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \right)^2$$

hat den Grenzwert $\frac{1}{2}$.

Man sagt, dafs $y = f(x)$ für $x = a$ unendlich grofs wird, wenn die absoluten Werte von y unbegrenzt wachsen, sobald x nach a konvergiert; in diesem Falle wird also $\frac{1}{f(x)}$ unendlich klein. Auch bei den unendlich grofsen Werten pflegt man von Ordnungen zu sprechen, und man sagt, dafs α unendlich grofs von der Ordnung n wird, wenn h von der ersten Ordnung unendlich grofs wird, falls $\frac{\alpha}{h^n}$ einen bestimmten endlichen Grenzwert erhält, der von null verschieden ist.

Eine Veränderliche, welche einen endlichen Grenzwert erhält, könnte man daher als unendlich klein von der Ordnung null ansehen, und eine unendlich grofs werdende Veränderliche als unendlich klein von negativer Ordnung.

Dagegen ist es nicht richtig, dafs man willkürlich eine unendlich kleine Zahl erster Ordnung wählen und dann jeder anderen unendlich kleinen Zahl eine bestimmte Ordnungszahl beilegen kann; es ist also nicht richtig, dafs man zu zwei unendlich kleinen Zahlen α und h immer eine Zahl n bestimmen kann, sodafs $\frac{\alpha}{h^n}$ einen bestimmten endlichen Grenzwert erhält, der von null verschieden ist. Einmal kann es nämlich eintreten, dafs das Verhältnis $\frac{\alpha}{h^n}$ für bestimmte Werte von n überhaupt keinen bestimmten Grenzwert besitzt und dann können wir nicht entscheiden, ob die Ordnung von α gröfser, gleich, oder kleiner als n ist. Sodann, selbst wenn dieses nicht eintritt, kann es doch vorkommen, dafs $\frac{\alpha}{h^n}$, welches auch der Wert von n sein mag, immer null oder immer unendlich wird; es kann auch eine Zahl m geben, sodafs für $n < m$ dieses Verhältnis null und für $n > m$ unendlich wird, ohne dafs es für $n = m$ einen bestimmten endlichen Grenzwert erhält.

§ 4. **Sätze über stetige Funktionen.**

17. Wir werden uns im Folgenden häufig der Redeweise bedienen:

Wir sagen, die Funktion $f(x)$ hat in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ eine bestimmte Eigenschaft, wenn man ein x_0 einschliefsendes Intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ abgrenzen kann, so dafs $f(x)$ jene Eigenschaft an jeder Stelle x dieses Intervalls besitzt.

Dieses vorausgeschickt, gilt der:

Satz I. Wenn eine Funktion stetig ist für $x = x_0$, und wenn $f(x)$ von null verschieden ist, so behält sie in der Umgebung von x_0 ein konstantes Vorzeichen.

In der That, setzen wir $f(x) = f(x_0) + \alpha$, so können wir, wenn $f(x_0)$ von null verschieden ist, um x_0 ein Intervall abgrenzen, sodafs für jeden Wert von x in ihm $|\alpha| < |f(x_0)|$ wird. Ist diese Bedingung erfüllt, so behält auch $f(x_0) + \alpha$ oder $f(x)$ beständig das Zeichen von $f(x_0)$.

18. *Satz II. Wenn eine Funktion in einem bestimmten Intervalle (a, b) stetig ist, und wenn sie für $x = a$ und für $x = b$ Werte mit verschiedenen Vorzeichen annimmt, so wird die Funktion $f(x)$ null für einen Wert von x zwischen a und b.*

In der That, man betrachte den Mittelwert von a und b. Wenn für ihn $f(x)$ nicht null wird, — ein Fall, in welchem unser Satz schon bewiesen wäre — so hat $f(x)$ dort ein bestimmtes Zeichen, welches entweder das von $f(a)$ oder das von $f(b)$ ist. Betrachtet man von den zwei Intervallen, in die (a, b) geteilt ist, jetzt dasjenige, an dessen Enden $f(x)$ entgegengesetzte Zeichen hat, und nennt man a_1 und b_1 die Grenzen dieses Intervalles, so ist

$$a_1 \geqq a, \quad b_1 \leqq b$$

und das neue Intervall ist halb so grofs als das erste. Wendet man auf das Intervall $a_1 b_1$ dieselben Überlegungen an, wie vorher auf das Intervall ab, so findet man ein Intervall $a_2 b_2$, an dessen Enden $f(x)$ Werte mit verschiedenen Vorzeichen annimmt. Fährt man so fort, so findet man eine Reihe von Intervallen $a\, b,\ a_1 b_1,\ a_2 b_2, \cdots a_n b_n, \cdots$, deren Anzahl man beliebig grofs machen kann. Findet sich unter den Zahlen ab kein Wert, für den $f(x)$ verschwindet, sodafs unser Satz bereits erwiesen wäre, so genügen jene den Bedingungen:

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \cdots \leqq a_n \leqq \cdots, \quad b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots b_n \geqq \cdots,$$

und

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

und allgemein:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Die Reihe der wachsenden Zahlen $a, a_1, a_2, \cdots$, die sämtlich kleiner als b bleiben, strebt gegen einen Grenzwert; ebenso strebt die Reihe der abnehmenden Zahlen $b, b_1, b_2, \cdots$, die jedoch immer gröfser als a bleiben, mit wachsenden n gegen einen Grenzwert, und die letzte Formel besagt, dafs $\lim a_n = \lim b_n$.

Nennt man x_1 den gemeinsamen Grenzwert der Zahlen a und der Zahlen b, so kann man n so grofs wählen, dafs a_n sich von x_1 um eine beliebig kleine Zahl ε unterscheidet und dafs auch b_n sich von x_1 um weniger als ε unterscheidet. Also giebt es in einem hinreichend kleinen, aber endlichen Intervall, das x_1 enthält, sowohl Werte von x, für die $f(x)$ positiv ist, als auch solche, für die $f(x)$ negativ ist. Also mufs $f(x_1) = 0$ sein; denn wäre $f(x_1)$ von 0 verschieden, so würde die Funktion $f(x)$ in einem hinreichend kleinen Intervalle um x_1 nicht Werte von verschiedenen Vorzeichen annehmen. Also ist unser Satz erwiesen.

19. *Satz III. Es sei $f(x)$ stetig in dem Intervalle (a, b), und ferner sei $f(a) = A$, $f(b) = B$. Läfst man nun x das Intervall (a, b) durchlaufen, so nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen A und B an.*

In der That, es sei K eine Zahl zwischen A und B und es sei, wie wir annehmen können, z. B.:

$$A < K < B.$$

Man setze $F(x) = f(x) - K$, dann ist $F(a) = A - K < 0$, und $F(b) = B - K > 0$. Da nun die stetige Funktion $F(x)$ für $x = a$ und für $x = b$ Werte von entgegengetzten Vorzeichen annimmt, so giebt es einen Wert x_1 von x zwischen a und b, für welchen $F(x_1) = 0$, oder $f(x_1) - K = 0$, d. h. $f(x_1) = K$ wird, wie behauptet wurde.

20. Man nennt *obere Grenze* der Werte einer Veränderlichen y eine Zahl l, die nicht kleiner ist als irgend einer der Werte y, die aber so beschaffen ist, dafs jede Zahl, die kleiner als l ist, von einem Werte y überstiegen werden kann. Man nennt l' die *untere Grenze* der Werte von y, wenn kein Wert von y kleiner ist als l', und wenn es Werte von y giebt, die kleiner sind als jede Zahl, die l' übersteigt.

Satz IV. Wenn eine Veränderliche y nur Werte kleiner als eine feste Zahl A annimmt, so existiert eine obere Grenze für die Werte von y (die gleich oder kleiner als A ist).

In der That, alle Zahlen lassen sich in zwei Klassen teilen: solche, die von irgend welchen Werten y überstiegen werden können, und solche, welche von ihnen nicht überstiegen werden können. Jede Zahl der ersten Klasse ist kleiner, als jede Zahl der zweiten. Daher bestimmen diese zwei Klassen eine Zahl l, die nicht kleiner ist als irgend eine Zahl der ersten Klasse, und nicht gröfser als irgend eine der zweiten. Diese Zahl l ist die obere Grenze der Werte von y. In der That, l kann von keinem Werte y überstiegen werden; denn wäre a ein Wert von y und $a > l$, so würde jede Zahl zwischen a und l zur ersten Klasse gehören. Daher kann l nicht kleiner als irgend eine Zahl der ersten Klasse sein.

Jede Zahl aber, die kleiner ist als l, gehört mithin zur ersten Klasse und kann daher von Werten y überstiegen werden.

In ähnlicher Weise beweist man:

Wenn eine Veränderliche y nur Werte annimmt, die gröfser sind als eine Zahl B, so existiert eine untere Grenze für die Werte von y.

Satz V. Ist l die obere (untere) Grenze der Werte, die $f(x)$ annimmt, wenn x in einem endlichen Intervalle (a, b) variirt, so existiert ein Wert x_1, sodafs innerhalb jedes hinreichend kleinen Intervalles um x_1 die obere (untere) Grenze der Werte von $f(x)$ ebenfalls l ist.

In der That, man teile das Intervall (a, b) in zwei gleiche Teile, dann giebt es in jedem der beiden Intervalle eine obere Grenze für die Werte von $f(x)$; diese ist nicht gröfser als l und in einem der Intervalle gleich l. Man teile nun das Intervall $a_1 b_1$, in dem der obere Grenzwert von $f(x)$ ebenfalls l ist, wieder in zwei gleiche Teile und fahre so fort.

Man erhält so eine Reihe von immer wachsenden Zahlen $a, a_1, a_2, \cdots$ und eine zweite Reihe von Zahlen $b, b_1, b_2, \cdots$, die abnehmen; diese Reihen haben dieselben Eigenschaften wie die in Nr. 18 und streben daher nach demselben Grenzwerte x_1.

Nimmt man jetzt ein Intervall $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon')$, innerhalb dessen sich x_1 befindet, so giebt es einen Wert von n, für welchen $x_1 - \varepsilon < a_n < x_1 < b_n < x_1 + \varepsilon'$ wird. Da nun die obere Grenze der Werte von $f(x)$ in dem Intervalle (a_n, b_n) gleich l ist, so ist auch die obere Grenze der Werte von $f(x)$ innerhalb jedes Intervalles $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon')$, das x_1 enthält, ebenfalls l; w. z. bew. w.

In derselben Weise würde man zeigen:

Wenn die Werte von $f(x)$ keine obere Grenze besitzen, wenn x in dem Intervalle (a, b) variiert, so giebt es in diesem Intervalle einen Wert x_1, sodafs in seiner Umgebung die Werte von $f(x)$ ebenfalls keine obere Grenze besitzen.

21. Man sagt, dafs eine Funktion $f(x)$ in einem Intervalle (a, b) ein *Maximum* wird für $x = x_0$, wenn $f(x_0)$ nicht kleiner ist als irgend ein Wert von $f(x)$ in demselben Intervalle. Man sagt, dafs $f(x)$ in einem Intervalle (a, b) ein

Minimum wird für $x = x_0$, wenn $f(x_0)$ nicht gröfser ist als irgend ein anderer Wert von $f(x)$ in demselben Intervalle.

Satz IV. Ist $f(x)$ stetig in dem Intervalle (a, b), so besitzen in ihm die Werte von $f(x)$ eine obere und eine untere Grenze, welche auch das Maximum und das Minimum in ihm sind.

In der That, leugnet man die Existenz einer oberen Grenze für die Werte von $f(x)$, so giebt es einen Wert x_1 in dem Intervalle (a, b), sodafs innerhalb jedes Intervalles um x_1 die Werte von $f(x)$ ebenfalls keinen Grenzwert besitzen. Da aber $f(x)$ auch für $x = x_1$ stetig ist, so kann man zu einem willkürlich gewählten positiven ε ein Intervall $(x_1 - h, x_1 + h)$ bestimmen, sodafs für jedes x in ihm $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ wird und daher existiert eine obere Grenze für die Werte von $f(x)$ in der Umgebung von x_1, was der gemachten Annahme widerspricht. Mithin besitzen die Werte von $f(x)$ eine obere Grenze in dem Intervalle (a, b), etwa l. Wir wollen beweisen, dafs $f(x)$ den Wert l auch annimmt. Es sei x_1 ein Wert von x, sodafs in der Umgebung von x_1 die obere Grenze ebenfalls l ist. Dann kann man zu einer beliebig klein gewählten positiven Zahl ε ein Intervall $(x_1 - h, x_1 + h)$ bestimmen, sodafs für alle Werte von x in ihm $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ ist. Da überdies l die obere Grenze der Werte von $f(x)$ in diesem Intervalle ist, so giebt es in ihm Werte von x, sodafs die zugehörigen Werte von $f(x)$ um weniger als ε von l abweichen. Mithin ist $|l - f(x_1)| < 2\varepsilon$; da aber ε beliebig klein ist, so geht dies nicht anders, als dafs $f(x_1) = l$ ist, w. z. bew. w.

In ähnlicher Weise würde man für die untere Grenze und das Minimum schliefsen.

Satz VII. Ist $f(x)$ stetig in dem Intervalle (a, b), so kann man zu einer beliebig kleinen Zahl ε eine andere Zahl h bestimmen, sodafs $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ wird für jedes Paar von Werten x, x' des Intervalles, deren Differenz kleiner als h ist.

Es sei $a < b$. Man bestimme $a_1 > a$ so, dafs für jeden Wert von x zwischen a und a_1 der Ausdruck $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird; sodann nehme man eine Gröfse $a_2 > a_1$, sodafs für jedes x zwischen a_1 und a_2 der Ausdruck $|f(x) - f(a_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird.

So fahre man fort; dies ist möglich, da $f(x)$ im Intervalle (a, b) stetig ist. Man erhält so eine Reihe von beständig wachsenden Zahlen $a a_1 a_2 \cdots$. Ich behaupte nun, dafs die Anzahl der $a a_1 a_2 \cdots$ endlich ist. Man behaupte das Gegenteil; dann haben die Gröfsen $a a_1 a_2 \cdots$ eine Grenze, die kleiner oder gleich b ist; sie sei c. Man bestimme ein Intervall $(c - \sigma, c)$, sodafs $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{6}$ wird für jedes x in diesem Intervalle. Da die Zahlen $a a_1 a_2 \cdots$ die obere Grenze c haben, so giebt es unter ihnen eine, etwa a_r, die in jenem Intervalle enthalten und so beschaffen ist, dafs $|f(a_r) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{6}$ und daher $|f(x) - f(a_r)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird. Ich kann $a_{r+1} = c$ setzen; das heifst c kann mit einem der Werte a identifiziert werden, oder es kann thatsächlich das Intervall ab in eine endliche Anzahl anderer Intervalle geteilt werden $a a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b$, sodafs $|f(x) - f(a_s)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird, sobald x innerhalb (a_s, a_{s+1}) liegt. Es sei nun h das kleinste der Intervalle, dann behaupte ich, dafs $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ wird, wenn $|x - x'| < h$ ist. In der That, x und x' sind entweder in demselben Intervalle enthalten (a_s, a_{s+1}) und dann ist

$$|f(x) - f(a_s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(x') - f(a_s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$|f(x) - f(x')| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Oder x und x' sind in zwei benachbarten Intervallen enthalten (a_{s-1}, a_s) und (a_s, a_{s+1}) und dann ist:

$$|f(x) - f(a_{s-1})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(a_{s-1}) - f(a_s)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f(x') - f(a_s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und also:

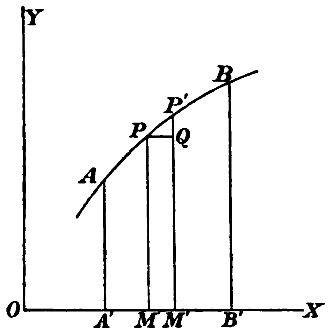
$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

w. z. bew. w.

22. Die Funktionen einer Veränderlichen pflegt man geometrisch durch Kurven darzustellen. Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, die in einem Intervalle (a, b) gegeben ist. Es seien zwei Cartesische Achsen gezeichnet OX und OY und

man gebe irgend einen Wert in dem Intervalle. Es sei OM der Abschnitt, der durch die Zahl x gemessen wird; dann zeichne man die Strecke MP parallel zur y-Achse, die durch die Zahl $f(x)$ gemessen wird. Läfst man nun x alle Werte im Intervalle (a, b) durchlaufen, so wird M zwischen den Punkten A' und B' variieren, deren Abscissen a und b sind und der Punkt P wird unendlich viele Lagen annehmen, von denen wir sagen, dafs ihre Gesamtheit eine Linie AB bildet. Wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist, so ist auch die Linie stetig, d. h. zu einer beliebigen Gröfse ε kann man einen Bogen PP' der Kurve bestimmen, sodafs die Entfernungen seiner Punkte vom Punkte P kleiner als ε sind. In der That, es ist $PP' < PQ + QP'$, und da man PQ beliebig klein wählen kann und QP', welches den Zuwachs der Funktion darstellt, auch beliebig klein machen kann, da die Funktion stetig ist, so kann man auch PP' beliebig klein machen.

Fig. 1.



Umgekehrt, wenn man eine stetige Kurve hat, die auf Cartesische Koordinaten bezogen ist, der Art, dafs jede Parallele zur y-Achse sie in einem einzigen Punkte trifft, so ergiebt diese Kurve eine stetige Funktion. In der That, erteilt man x irgend einen Wert, so erhält man einen entsprechenden Wert für y, und da, wenn die Achsen rechtwinklig sind, $QP' < PP'$ ist, und PP' beliebig klein gemacht werden kann, so kann man auch QP' beliebig klein machen, welches den Zuwachs der Funktion darstellt.

Man bemerke jedoch, dafs wir eine *Linie* das System der Punkte genannt haben, welches Werte einer Funktion darstellt, und dafs es nicht erlaubt ist, auf die so definierten Linien die Eigenschaften derjenigen Linien ohne Beweis zu übertragen, mit denen man gewöhnlich operiert; noch weniger ist es gestattet auf solche Eigenschaften zurückzugreifen, um Sätze über Funktionen zu beweisen.

§ 5. Beispiele von stetigen Funktionen.

23. Die in den Nummern 10, 11, 12 bewiesenen Sätze sagen aus, daſs die Summe und das Produkt von stetigen Funktionen auch stetige Funktionen sind; und auch der Quotient zweier stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion, solange die Funktion im Divisor nicht null ist. Daher ist jede ganze rationale Funktion von x, die man erhält, indem man mit x und den Konstanten Additionen und Multiplikationen vornimmt, eine stetige Funktion für alle Werte von x. Die gebrochenen rationalen Funktionen, d. h. die Quotienten zweier ganzen Funktionen, sind stetig für alle Werte von x, für welche der Nenner nicht verschwindet.

24. **Exponentialfunktion.** Betrachten wir die Werte $y = a^x$, wo a irgend eine positive Zahl ist. Jedem ganzzahligen Werte von x entspricht ein bestimmter Wert für y. Erteilt man x einen gebrochenen Wert $\frac{m}{n}$, so hat $a^{\frac{m}{n}}$, wie man aus der Algebra weiſs, n Werte, von denen nur einer reell und positiv ist. Dieser Wert ist es, den wir a^x erteilen wollen. Giebt man x einen irrationalen Wert x_0, so versteht man unter a^{x_0} den Grenzwert, welchen a^x erhält, wenn man x eine Reihe rationaler Werte erteilt, die sich dem Werte x_0 unbegrenzt nähern. Unter diesen Beschränkungen ist die Funktion a^x, welche die Exponentialfunktion heiſst, für jeden Wert von x gegeben.

Sie ist stetig. Um dies zu beweisen, schicken wir voraus, daſs $\lim a^x = 1$ wird, wenn x den Wert 0 erhält.

In der That nehmen wir zuerst $a > 1$ an und verstehen unter ε eine beliebig kleine positive Gröſse. Es sei ferner m eine ganze positive Zahl, deren Festlegung wir uns vorbehalten. Alsdann wird die Ungleichung erfüllt sein $a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$, wenn man m so bestimmen kann, daſs $(1+\varepsilon)^m > a$. Nun ist:

$$(1+\varepsilon)^m = 1 + m\varepsilon + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\varepsilon^2 + \cdots$$

und die Terme dieses Polynoms sind alle positiv. Es wird also $(1+\varepsilon)^m > 1 + m\varepsilon$. Daher ist die vorige Ungleichheit erfüllt, wenn $1 + m\varepsilon \geqq a$ oder $m \geqq \frac{a-1}{\varepsilon}$ ist.

Giebt man jetzt x positive Werte, die nicht gröfser sind als $\frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{a-1}$, so wird $a^x > 1$ und $a^x < 1 + \varepsilon$. Daher kann man für positive hinreichend kleine Werte von x den Ausdruck $a^x - 1$ kleiner machen als eine beliebig kleine Zahl ε; d. h. es wird $\lim a^x = 1$ für unendlich kleines positives x. Ist x unendlich klein, aber negativ und gleich $-y$, so wird $a^x = \frac{1}{a^y}$; wird nun x null, so wird auch y null, a^y wird 1 und daher erhält auch $\frac{1}{a^y} = a^x$ den Grenzwert 1. Dasselbe gilt für $a < 1$. In der That, setzt man $\frac{1}{a} = b$, so wird $b > 1$ und $a^x = b^{-x}$; wenn x null wird, so werden b^x und $b^{-x} = 1$, wie soeben bewiesen ist.

Geben wir jetzt x den Zuwachs h; dann wird der Zuwachs der Funktion $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$. Nun hat a^x einen endlichen Wert und $a^h - 1$ hat den Grenzwert 0; daher wird der Zuwachs der Funktion unendlich klein mit dem Zuwachs der Veränderlichen. a^x ist also stetig.

Die gefundene Ungleichung $(1 + \varepsilon)^m > a$, welche für hinreichend grofse Werte von m gilt, besagt, dafs eine Zahl $1 + \varepsilon > 1$ zu einer solchen Potenz erhoben werden kann, dafs sie eine beliebig grofse Zahl übersteigt. Daher wächst die Funktion a^x, wenn $a > 1$, mit wachsendem x über jede Grenze. Dieselbe Gröfse a^x erhält den Grenzwert 0, wenn $x = -\infty$ wird, d. h. wenn x negative, aber absolut beliebig grofse Werte annimmt. Denn setzt man $x = -y$, so wird $a^x = \frac{1}{a^y}$, und wenn $x = -\infty$ wird, so wird $y = +\infty$, a^y wird ∞ und $\frac{1}{a^y}$ wird null. Ist $a < 1$, so wird a^x bei unbegrenzt wachsendem x null, und nimmt x bis $-\infty$ ab, so wird $a^x = +\infty$.

Wir haben definiert, dafs wenn x_0 irrational ist, $a^{x_0} = \lim\limits_{x=x_0} a^x$ sein sollte. Um das Vorhergehende ganz streng zu begründen, mufs man beweisen, dafs dieser Grenzwert existiert. Man gebe daher der Veränderlichen rationale Werte x, welche wachsend gegen x_0 streben. Ist $a > 1$, so wächst a^x beständig, aber nicht unbegrenzt; denn ist x' eine rationale Zahl $x' > x_0 > x$, so wird $a^x < a^{x'}$; daher strebt a^x gegen einen Grenzwert. Man gebe jetzt der Veränderlichen rationale Werte x', welche abnehmend x_0 zustreben. Dann nimmt $a^{x'}$ beständig ab, aber nicht unbegrenzt, und strebt daher einem Grenzwerte zu. Es ist aber $\lim a^x = \lim a^{x'}$; denn es ist $\frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x}$. Streben nun x und x' dem Werte x_0 zu, so wird $x' - x$, das lauter rationale Werte annimmt, null und $a^{x'-x}$ wird Eins, weil der vorhergehende Beweis nichts zu wünschen übrig läſst, wenn man der Veränderlichen rationale Werte erteilt. Überdies wird, wenn $x < x_0 < x'$ ist, auch $a^x < a^{x_0} < a^{x'}$.

Sind x_0 und x_1 irrationale Zahlen und ist $x_0 < x_1$, so wird auch $a^{x_0} < a^{x_1}$, sobald $a > 1$ angenommen wird. In der That, es sei x eine rationale Zahl, sodaſs $x_0 < x < x_1$ ist, dann wird auch $a^{x_0} < a^x < a^{x_1}$ und $a^{x_0} < a^{x_1}$. Sind x_0 und x_1 irrational, so ist ebenso, wie wenn sie rational sind, $a^{x_0} \cdot a^{x_1} = a^{x_0 + x_1}$. In der That, sind x und x' rationale Zahlen, deren Grenzen x_0 und x_1 sind, so wird $a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}$; geht man zur Grenze über, so findet man die zu beweisende Formel u. s. w.

25. **Funktionen von Funktionen.** Manchmal ist eine Veränderliche y an eine Veränderliche x durch eine dritte Veränderliche u gebunden. Dies ist der Fall, wenn man hat:

$$y = f(u) \quad \text{und} \quad u = \varphi(x).$$

Erteilt man dann x einen Wert x_0, so nimmt u einen Wert u_0 an, für welchen $u_0 = \varphi(x_0)$ wird, und y erhält einen Wert y_0, für welchen $y_0 = f(u_0)$ wird. Man sagt dann, daſs y eine Funktion einer Funktion von x ist, oder daſs es vermöge der Veränderlichen u eine Funktion von x wird.

Wenn die Funktionen f und φ stetig sind, so ist auch y als Funktion von x betrachtet stetig.

In der That, ist f eine stetige Funktion von u, so kann man zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine andere positive Zahl ε' bestimmen, sodaſs einem Zuwachse von u, dessen Betrag kleiner als ε' ist, ein Zuwachs von y entspricht, dessen Betrag kleiner als ε ist. Ist $u = \varphi(x)$ eine stetige Funktion von x, so kann man eine neue positive Zahl ε'' bestimmen, sodaſs einem Zuwachs von x, dessen Betrag kleiner als ε'' ist, ein Zuwachs von u entspricht, dessen Betrag kleiner als ε' ist. Der zugehörige Zuwachs von y wird daher kleiner als ε, was zu beweisen war.

So wird beispielsweise e^u eine stetige Funktion von x, wenn u eine stetige Funktion von x ist.

26. **Inverse Funktion.** Es sei $y = f(x)$ eine Funktion der Veränderlichen x, welche in dem Intervalle (a, b) gegeben und stetig ist, und es sei $f(a) = \alpha$ und $f(b) = \beta$. Alsdann wird die Funktion y jeden Wert zwischen α und β annehmen, aber sie kann ihn mehrmals annehmen. Wir wollen aber voraussetzen, dafs $f(x)$ jeden Wert zwischen α und β nur einmal annimmt. Damit sich dies ereigene, mufs, wenn x von a bis b geht, y immer im selben Sinne sich ändern, d. h. immer wachsen oder immer abnehmen; denn sonst würde es einen und denselben Wert mehrmals annehmen. Fixiert man nun einen Wert von y zwischen α und β, so giebt es einen und nur einen Wert von x, für welchen $f(x) = y$ wird; x als Funktion von y betrachtet, heifst die *inverse Funktion von* $f(x)$.

Wenn eine Funktion $f(x)$ stetig ist, so ist auch ihre inverse stetig. Es sei $y = f(x)$; man gebe y einen Wert y_0 und suche den entsprechenden x_0, für welchen $y_0 = f(x_0)$ wird. Läfst man jetzt x zwischen $x_0 + \varepsilon$ und $x_0 - \varepsilon$ variieren, wo ε beliebig klein gewählt ist, so variiert y zwischen y_1 und y_2, wo y_1 und y_2 zwei y_0 einschliefsende Werte sind. Alsdann gehört zu jedem Werte von y zwischen y_1 und y_2 ein Wert von x zwischen $x_0 + \varepsilon$ und $x_0 - \varepsilon$; die Differenz zwischen ihm und x_0 ist kleiner als ε, daher ist x eine stetige Funktion von y.

27. **Logarithmen.** y heifst der Logarithmus von x im System mit der Basis a, wenn $a^y = x$ ist, und man schreibt $y = {}^a\mathrm{Log}\, x$. Die Basis a ist eine positive, von 1 verschiedene Zahl. Jede positive Zahl besitzt dann einen zu ihr gehörigen Logarithmus; denn, ist $a > 1$, so wächst a^y beständig von 0 bis ∞, wenn y von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, und zwar nimmt a^y dabei jeden positiven Wert einmal und nur einmal an. Da die Exponentialfunktion stetig ist, so ist es auch ihre inverse, der Logarithmus.

Unter den unendlich vielen Systemen von Logarithmen sind diejenigen besonders gebräuchlich, deren Basis die Zahl

$e = \lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ist; sie heifsen *natürliche* (Neper'sche oder *hyperbolische*) Logarithmen, und wir bezeichnen sie durch log. Aufserdem sind die Logarithmen mit der Basis 10 besonders üblich, sie heifsen *dekadische* (*gemeine* oder Brigg'sche) Logarithmen.

Ist u eine stetige Funktion von x mit lauter positiven Werten, so ist auch $\operatorname{Log} u$ eine stetige Funktion von x. Die Funktion u^v, in der u und v stetige Funktionen von x sind und wo $u > 0$ ist, ist ebenfalls eine stetige Funktion. Denn es ist $u^v = e^{v \cdot \log u}$. Ist im besonderen v konstant und gleich m, so ist die Funktion u^m, wenn u eine stetige positive Funktion ist, ebenfalls stetig, mag nun m eine ganze Zahl oder ein Bruch oder irrational, positiv oder negativ sein.

28. **Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für unendlich grofses m.** Wir wollen zunächst m ganze positive Werte geben; dann hat man nach dem binomischen Satze von Newton:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots m}\cdot\frac{1}{m^m}.$$

Dies können wir schreiben:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right);$$

dabei ist $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ gesetzt und alle Glieder sind positiv. Wächst m, so wachsen alle Glieder vom dritten an, aufserdem wächst ihre Anzahl. Daher wächst $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ beständig mit wachsendem m. Setzt man aber statt der Klammern $\left(1-\frac{1}{m}\right)$, $\left(1-\frac{2}{m}\right)$, ... die Einheit, so vergröfsert man die rechte Seite, also ist:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

und um so mehr ist, wenn man $n!$ durch 2^n ersetzt:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}$$

oder:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+1-\frac{1}{2^{m-1}} < 3\,.$$

Also wächst der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ mit wachsendem m beständig und bleibt dabei kleiner als 3, folglich hat er einen Grenzwert, der nicht gröfser ist als 3. Der Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ wird durch den Buchstaben e bezeichnet; wir werden später Methoden kennen lernen, um rasch seinen Wert zu berechnen. Die ersten Dezimalen sind:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045 \cdots$$

Geben wir jetzt m positive, nicht ganzzahlige Werte. Es sei n die gröfste ganze Zahl, die kleiner als m ist, sodafs:

$$n < m < n+1,$$

dann wird:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n+1}$$

und daher:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m.$$

Da nun:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^m \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m$$

ist, so wird umsomehr:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

oder:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Läfst man m unbegrenzt wachsen, so wachsen auch n und $n+1$ unbegrenzt. Das erste Glied hat den Grenzwert e, da $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ und $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ ist; das letzte hat ebenfalls den Grenzwert e, da $\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ und $\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$ ist. Daher hat auch $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, da es zwischen zwei Zahlen enthalten ist, welche denselben Grenzwert haben, ebenfalls den Grenzwert e.

Geben wir schliefslich m negative Werte; wir nehmen sie kleiner als -1, damit der Ausdruck eine Bedeutung hat. Setzen wir $m = -n$, so ist n positiv und es wird:

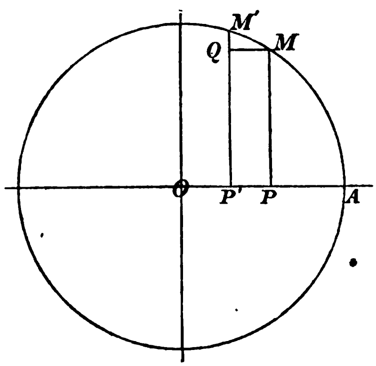
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

Läfst man den absoluten Wert von m unbegrenzt wachsen, so wächst auch n unbegrenzt und, da $\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$ und $\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$ wird, so wird auch $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$. Also erhält dieser Ausdruck immer denselben Grenzwert e, welche Werte auch m durchläuft; nur mufs der absolute Betrag von m über jede Grenze wachsen.

Setzt man in den vorstehenden Formeln $m = \frac{1}{\alpha}$, so strebt α gegen null, wenn $|m|$ unbegrenzt wächst; mithin hat $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ für $\alpha = 0$ den Grenzwert e.

29. **Kreisfunktionen.** Es sei x die Länge eines Bogens AM eines Kreises, dessen Radius gleich 1 ist; dann ist:

Fig. 2.



$$MP = \sin x, \quad OP = \cos x.$$

Erteilt man x einen Zuwachs MM', so bekommt der Sinus den Zuwachs QM', der Cosinus den Zuwachs PP'. Es sind aber PP' und QM' kleiner als die Sehne MM' und daher werden auch die Zuwüchse des Sinus und Cosinus null, wenn die der Veränderlichen verschwinden; sie sind also stetige Funktionen von x.

Die Gleichungen:

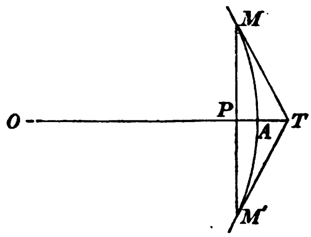
$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

besagen, dafs auch die anderen trigonometrischen Funktionen stetig sind für alle Werte x. Ausgenommen sind einzig und allein beim Tangens und Secans die Werte x, welche den Cosinus annullieren, beim Cotangens und Cosecans diejenigen, welche den Sinus annullieren. An diesen Stellen werden die Funktionen unstetig, indem sie durch das Unendliche hindurchgehen.

Ist u eine stetige Funktion von x, so sind auch $\sin u$ und $\cos u$ stetige Funktionen von x (Nr. 25).

Die inverse Funktion des Sinus heifst Arcus sinus; setzt man also $y = \arcsin x$, so heifst dies $x = \sin y$. Läfst man y von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gehen, so wächst $x = \sin y$ stetig von -1 bis $+1$. Also gehört zu jedem Werte von x zwischen -1 und $+1$ ein einziger von $y = \arcsin x$, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten ist. Dieser Wert ist jedoch nicht der einzige, dessen Sinus x ist; denn auch die Bögen $\arcsin x + 2k\pi$ und $(2k+1)\pi - \arcsin x$ haben zum Sinus x. Ist $|x| > 1$, so giebt es keinen Bogen, dessen Sinus x ist. Versteht man jetzt unter $y = \arcsin x$, wo $|x| < 1$, den Bogen, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten und dessen Sinus x ist, so ist y eine stetige Funktion von x. In ähnlicher Weise ist $y = \arccos x$ eine eindeutige und stetige Funktion von x, wenn x zwischen -1 und $+1$ enthalten ist und wenn man für y denjenigen Bogen nimmt, der zwischen 0 und π liegt und dessen Cosinus x ist. Bei passenden Verabredungen kann man auch $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$ und $\operatorname{arc\,cosec} x$ zu eindeutigen Funktionen machen.

Fig. 3.



30. *Der Ausdruck* $\frac{\sin x}{x}$ *erhält, wenn* x *null wird, den Grenzwert 1.*

Es sei O der Mittelpunkt eines Kreises, und $OA = 1$ sein Radius. Der Bogen AM sei gleich x und ebenso $AM' = x$, MT und $M'T$ seien die Tangenten an den Kreis in M und M'. Dann weifs man aus der Geometrie

$MPM' < MAM' < MTM'$ oder $2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tang} x$. Dividiert man durch $2 \sin x$ und bedenkt, dafs $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, so erhält man:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Läfst man x null werden, so ist $\frac{x}{\sin x}$ zwischen zwei Zahlen enthalten, deren eine konstant gleich 1 und deren andere $\frac{1}{\cos x}$ für $x = 0$ den Grenzwert 1 erhält. Also haben auch $\frac{x}{\sin x}$ und $\frac{\sin x}{x}$ den Grenzwert 1; w. z. bew. w.

§ 6. Übungen.

31. — 1) Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x; wächst x bis $+\infty$, so wächst auch $f(x)$ unbegrenzt, und nimmt das Zeichen des Koeffizienten der höchsten Potenz an.

2) Es sei $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, wo f und φ ganze rationale Funktionen von x sind, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann ist y eine stetige Funktion von x für alle Werte x, welche $\varphi(x)$ nicht zu null machen. Ist a eine α-fache Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$, so wird y für $x = a$ unendlich von der Ordnung α, falls $x - a$ unendlich klein von erster Ordnung ist. Wächst x unbegrenzt, so erhält y einen bestimmten Grenzwert, der endlich und von null verschieden, null oder unendlich grofs ist, je nachdem der Grad von $f(x)$ gleich, kleiner oder gröfser als der von $\varphi(x)$ ist. Sind die Grade von $f(x)$ und $\varphi(x)$ gleich, so ist der Grenzwert von y für $x = \infty$ gleich dem Verhältnisse der Koeffizienten der höchsten Potenzen, sind die Grade ungleich, so wird y unendlich grofs oder klein von einer Ordnung, die gleich der Differenz der Grade ist, wenn man x als unendlich grofs von erster Ordnung betrachtet.

3) In Nr. 25 ist bewiesen, dafs e^u eine stetige Funktion von x ist, wenn u eine solche ist. Ist u unstetig, so kann e^u kontinuierlich oder diskontinuierlich sein. Setzt man z. B. $u = \frac{1}{x}$, so ist $e^{\frac{1}{x}}$ stetig für alle Werte x aufser $x = 0$, wo

$\frac{1}{x}$ unstetig wird. Wird x null, so strebt $e^{\frac{1}{x}}$ nach $+\infty$ oder 0, je nachdem x vom Positiven oder Negativen her nach null konvergiert. Die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ wird, wenn man ihr an der Stelle $x = 0$ den Wert null erteilt, für alle Werte von x eine stetige Funktion von x, obwohl $-\frac{1}{x^2}$ für $x = 0$ unstetig ist. Die Funktion $y = \frac{ae^{\frac{1}{x}} + b}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ ist stetig für alle Werte x aufser $x = 0$. Konvergiert x gegen 0, so erhält y den Grenzwert a oder b, je nachdem x von Positiven oder Negativen nach 0 konvergiert.

In ähnlicher Weise kann $\sin u$ unstetig sein, wenn u eine unstetige Funktion von x ist. Setzt man $u = \frac{1}{x}$, so ist die Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ stetig für alle Werte x ausgenommen $x = 0$. Konvergiert x gegen 0, so schwankt y zwischen -1 und $+1$ hin und her, ohne irgend einen Grenzwert zu erhalten. Die Funktion $y = x\sin\frac{1}{x}$ wird mit x null und ist daher stetig, wenn man für $x = 0$ auch $y = 0$ setzt. Die Funktion $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ schwankt, wenn x null wird, dergestalt, dafs sie unendlich oft jeden Wert annimmt.

4) Zu beweisen, dafs

$$e > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots m}$$

und dafs

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots m} + \frac{1}{1.2\ldots m} \cdot \frac{1}{m}$$

ist, welches auch die ganze Zahl m ist.

5) Zu beweisen, dafs

$$\lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Ein Kapital C, das jährlich zu $r\%$ Zinsen angelegt ist und jeden n^{ten} Teil des Jahres verzinst wird, nimmt nach t Jahren den Wert an

$$C\cdot\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{nt}.$$

Man soll den Grenzwert hiervon für unbegrenzt wachsendes n finden.

6. *Wenn $f(x+1)-f(x)$ bei unbegrenzt wachsendem x einen Grenzwert L erhält, und wenn eine obere Grenze der absoluten Werte von $f(x)$ in jedem endlichen Intervall existiert, so hat auch $\frac{f(x)}{x}$ denselben Grenzwert L.*

In der That, da $\lim\limits_{x=\infty}[f(x+1)-f(x)]=L$ ist, so kann man zu einer willkürlich gegebenen positiven Zahl ε eine Zahl N bestimmen, sodafs für jeden Wert von $x \geqq N$ der Ausdruck $|f(x+1)-f(x)-L|<\varepsilon$ wird. Man erteile nun x einen Wert $>N$ und es sei n die gröfste ganze Zahl, welche in $x-N$ enthalten ist; dann ist $x-n=y$ zwischen N und $N+1$ enthalten. Da $y, y+1, y+2, \cdots > N$, so hat man die Ungleichheiten:

$$\begin{array}{l}
|f(y+1)-f(y) \qquad\quad -L|<\varepsilon \\
|f(y+2)-f(y+1)-L|<\varepsilon \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|f(y+n-1)-f(y+n-2)-L|<\varepsilon \\
|f(x) \qquad\quad -f(y+n-1)-L|<\varepsilon .
\end{array}$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$|f(x)-f(y)-nL|<n\varepsilon$$

und dies giebt nach Division durch x und Substitution von $x-y$ an Stelle von n:

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{x}-L+\frac{y}{x}L\right|<\frac{x-y}{x}\varepsilon$$

oder:

$$\left|\frac{f(x)}{x}-L\right|<\left|\frac{f(y)}{x}-\frac{y}{x}L\right|+\frac{x-y}{x}\varepsilon<\left|\frac{f(y)}{x}\right|+\frac{y}{x}L+\frac{x-y}{x}\varepsilon.$$

Die rechte Seite besteht aus drei Summanden, von denen der letzte kleiner als ε ist und daher beliebig klein gemacht werden kann. Der zweite Summand wird mit wachsendem x null, da L endlich und $y<N+1$ ist. Der erste Summand $\left|\frac{f(y)}{x}\right|$ ist kleiner als $\frac{l}{x}$, wenn l die obere Grenze der Werte von $|f(y)|$ in dem Intervalle $(N, N+1)$ bedeutet. Sein Grenz-

wert ist daher ebenfalls null und mithin kann der Ausdruck $\left|\frac{f(x)}{x} - L\right|$ beliebig klein gemacht werden, es ist also $\lim \frac{f(x)}{x} = L$, w. z. bew. w.

In ähnlicher Weise kann man den Satz beweisen:

Wenn mit unbegrenzt wachsendem x der Ausdruck $|f(x+1) - f(x)|$ unbegrenzt wächst und die Werte $|f(x)|$ eine obere Grenze in jedem endlichen Intervalle besitzen, so wächst auch $\frac{f(x)}{x}$ unbegrenzt.

Die Bedingung, dafs die absoluten Werte von $f(x)$ in jedem endlichen Intervalle eine obere Grenze besitzen, wird von einem bestimmten Werte von x an eine notwendige. Die Funktion $f(x) = \operatorname{tg} \pi x$ ist beispielsweise so beschaffen, dafs $f(x+1) - f(x) = 0$ ist und dafs also auch der Grenzwert dieser Differenz null ist. Nichtsdestoweniger hat $\frac{\operatorname{tg} \pi x}{x}$ für unendlich grofses x überhaupt keinen Grenzwert. Die umgekehrte Behauptung, dafs, wenn $\lim \frac{f(x)}{x} = L$ ist, auch $\lim [f(x+1) - f(x)] = L$ wäre, ist nicht richtig; denn die Funktion $f(x) = \sin \pi x$, für welche $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$ ist, ergiebt $f(x+1) - f(x) = -2 \sin \pi x$, einen Ausdruck, der für $x = \infty$ überhaupt keinen Grenzwert erhält.

7) Zu beweisen:

Wenn $\lim \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = L$ (oder ∞) ist, und wenn die absoluten Werte von $f(x)$ in jedem endlichen Intervall eine obere Grenze besitzen, so ist auch $\lim \frac{f(x)}{x^{n+1}} = L$ (oder ∞).

Wenn $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ mit wachsendem x gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert oder unendlich grofs wird, und wenn $f(x)$ immer positiv ist, so dafs in jedem endlichen Intervalle die Werte von $f(x)$ nicht nur eine obere, sondern auch eine untere von null verschiedene Grenze besitzen, so konvergiert auch $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ gegen denselben Grenzwert.

8) Zu beweisen, dafs die folgenden drei Gleichungen für jeden Wert von n bestehen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty, \quad \text{wenn} \quad a > 1$$

$$\lim_{x=\infty} a^x x^n = 0, \quad \text{„} \quad a < 1$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0.$$

Die vorstehenden Funktionen liefern Beispiele von unendlich grofsen und unendlich kleinen Werten, die keine Ordnung besitzen. So wird a^x für $a > 1$ mit wachsendem x unendlich grofs; nimmt man aber x als unendlich grofs von erster Ordnung, so giebt es keinen Wert von n, für welchen $\frac{a^x}{x^n}$ irgend einen endlichen Grenzwert erhält. Also wird a^x unendlich grofs von einer Ordnung, die jede durch eine Zahl mefsbare Ordnung übersteigt. In ähnlicher Weise wird a^x, wenn $a < 1$, unendlich klein von einer Ordnung, die verglichen mit der von $\frac{1}{x}$ jede durch eine Zahl mefsbare Ordnung übersteigt. $\log x$ wird von einer Ordnung unendlich grofs, die kleiner ist, als jede durch eine Zahl mefsbare Ordnung.

In ähnlicher Weise kann man beweisen, dafs die Funktion x^x, welche für alle positiven Werte von x definiert ist, gegen eins konvergiert, wenn x null wird; wird $x = \infty$, so wird auch $x^x = \infty$ und zwar von einer Ordnung, die gröfser ist als jede endliche Ordnung. Die Nr. 27 definiert die Funktion x^x nicht für negatives x. Der Ausdruck x^x hat dann, wenn x von der Form ist $x = \frac{2m}{2n+1}$, aufser einem einzigen positiven Wert nur imaginäre Werte. Hat x die Form $x = \frac{2m+1}{2n+1}$, so hat x^x aufser imaginären Werten nur einen einzigen negativen Wert; ist $x = \frac{2m+1}{2n}$, so hat x^x überhaupt keinen reellen Wert.

9) Die Funktion $f(x) = ax$, in der a eine willkürliche Konstante bedeutet, ist die einzige stetige Funktion von x, welche für beliebige Werte x und y die Gleichung erfüllt:

$$(1) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

In der That es sei $f(x)$ eine Funktion, deren Werte die Gleichung (1) erfüllen; setzt man $y=0$, so wird $f(x)=f(x)+f(0)$, und daher

$$f(0)=0. \tag{2}$$

Setzt man $y=-x$, so wird $0=f(x)+f(-x)$ und daher

$$f(-x)=-f(x). \tag{3}$$

Setzt man $y+z$ an Stelle von y, so ergiebt sich:

$$f(x+y+z)=f(x)+f(y+z)=f(x)+f(y)+f(z)$$

und allgemein wird

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n). \tag{4}$$

Setzt man in dieser Formel alle x einander gleich, so erhält man:

$$f(nx)=nf(x). \tag{5}$$

In dieser Gleichung setze man $x=1$, und man erhält $f(n)=nf(1)$, oder, wenn man die Grösse $f(1)$ mit a bezeichnet, $f(n)=an$.

Diese Gleichung gilt zunächst für ganze positive Zahlen n, die Formeln (2) und (3) zeigen aber, dafs sie für jedes ganzzahlige n gilt.

Setzt man in (5) $x=\frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind und n positiv ist, so erhält man $f(m)=nf\left(\frac{m}{n}\right)$, oder $am=nf\left(\frac{m}{n}\right)$, also wird $f\left(\frac{m}{n}\right)=a\frac{m}{n}\cdot$ Diese Gleichung giebt die Funktionswerte für alle rationalen Werte der Veränderlichen; für diese wird nämlich $f(x)=ax$. Läfst man jetzt x gegen einen irrationalen Wert x_0 konvergieren, so konvergiert $f(x)$, da es als stetig vorausgesetzt ist, gegen $f(x_0)$ und ax gegen ax_0, daher wird $f(x_0)=ax_0$. Also ist die einzige Funktion, welche sich der angegebenen Eigenschaft erfreut, ax.

10) Die Funktion $f(x)=a^x$ ist die einzige stetige Funktion von x, deren Werte der Gleichung genügen:

$$f(x+y)=f(x)f(y).$$

11) Wenn für alle Wertepaare x, y die Gleichung besteht $f(xy)=f(x)f(y)$, so ist $f(x)=x^a$, wo a eine Konstante ist.

12) Ist $f(xy) = f(x) + f(y)$, so ist $f(x) = \operatorname{Log} x$, wo die Basis des Logarithmus beliebig ist.

13) Ist $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, so ist die Funktion $f(x)$ entweder gleich $\cos ax$ oder gleich $\frac{a^x + a^{-x}}{2}$, wo a eine willkürliche Konstante ist.

14) Es sei $f(x,t)$ eine Funktion der beiden Veränderlichen x und t, und wir wollen annehmen, dafs für eine bestimmte Klasse von Werten x der Grenzwert existiert, den $f(x,t)$ erhält, wenn t entweder unendlich grofs wird oder gegen eine endliche konstante Gröfse konvergiert, oder auch gegen einen Grenzwert konvergiert, der eine Funktion von x ist. Der Grenzwert von $f(x,t)$ wird im allgemeinen von x abhängen und eine Funktion von x sein. So ist beispielsweise $\lim\limits_{t=\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t$ eine Funktion, die für alle Werte von x definiert ist, und gleich e^x (Übung 5). Die auf diese Weise definierten Funktionen liefern Beispiele für Unstetigkeiten von Funktionen.

Die Funktion $F(x) = \lim\limits_{t=\infty} \frac{atx+b}{tx+1}$ ist für alle Werte von x definiert und beständig gleich a, wenn $x \neq 0$ ist, sie ist gleich b, wenn $x = 0$ ist. Dieselbe Funktion kann man auch schreiben: $F(x) = \lim\limits_{t=0} \frac{ax+bt}{x+t}$.

Ist $x > 0$, so konvergiert x^t mit unbegrenzt wachsendem t gegen $0, 1$ oder ∞, je nachdem x kleiner, gleich oder gröfser als 1 ist.

Die Funktion $F(x) = \lim\limits_{t=\infty} \frac{f(x)\,x^t + \varphi(x)}{x^t+1}$, in der f und φ für positive Werte von x definiert sind, ist für dieselben Werte von x definiert und fällt mit $\varphi(x)$ zusammen, wenn $x < 1$ ist und mit $f(x)$, wenn $x > 1$ ist; es ist $F(1) = \frac{f(1)+\varphi(1)}{2}$.

Die Funktion $F(x) = \lim\limits_{t=\infty} \frac{(1+\sin\pi x)^t - 1}{(1+\sin\pi x)^t + 1}$ ist für alle Werte von x definiert und ist gleich 0, wenn x eine ganze Zahl ist; sie ist 1, wenn x nicht ganzzahlig und die nächst kleinere ganze Zahl gerade ist; $F(x)$ ist gleich -1, wenn x nicht ganzzahlig und die nächst kleinere ganze Zahl ungerade ist.

Zweites Kapitel.

Von den Ableitungen.

§ 1. Definition der Ableitung.

32. Besitzt das Verhältnis des Zuwachses der Funktion zum Zuwachs der Veränderlichen einen bestimmten Grenzwert, wenn der Zuwachs der Veränderlichen null wird, so heifst dieser Grenzwert *die Ableitung* der Funktion.

Ist $y = f(x)$ die Funktion, $\Delta x = h$ der Zuwachs der Veränderlichen und $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ der entsprechende Zuwachs der Funktion, so ist die Ableitung der Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für unendlich klein werdendes h. Ist z. B. $f(x) = ax + b$, so wird $f(x+h) = a(x+h) + b$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ und $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$; also ist a die Ableitung von $ax + b$. Ist $a = 0$, so reduziert sich die Funktion auf eine Konstante und ihre Ableitung ist null.

Man bezeichnet die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ durch y' oder $f'(x)$ oder auch durch Dy und $Df(x)$. Sie hängt im allgemeinen ab von dem Werte, den man x zuerteilt und ist daher eine Funktion von x. Es kann jedoch eine Funktion überhaupt keine Ableitung besitzen; dies kann der Fall sein entweder für besondere Werte von x, oder auch für alle. Es ist sehr bequem, die Ableitung, welche der Grenzwert eines Quotienten ist, einem wirklichen Quotienten gleich zu setzen, und man setzt daher $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Alsdann sind dx und dy zwei Gröfsen, welche das Differential der Funktion und das Differential der Veränderlichen genannt werden, und die einzig und allein durch die Bedingung verknüpft sind, dafs ihr

Quotient den Wert $f'(x)$ hat. Eine von ihnen ist deshalb willkürlich; man pflegt dx willkürlich zu wählen, und dann ist $dy = f'(x)\,dx$. Es ist also das Differential einer Funktion gleich der Ableitung multipliziert mit dem Differentiale der unabhängigen Veränderlichen. Eine Funktion differentiieren heifst ihre Ableitung oder ihr Differential berechnen.

Eine Funktion, die eine bestimmte endliche Ableitung besitzt, ist stetig. Denn es ist $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x$; wenn nun Δx null wird, so erhält $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen endlichen Grenzwert y' und daher wird Δy null. Wenn die Ableitung nicht null ist, so ist der Zuwachs der Funktion unendlich klein von erster Ordnung, wenn man Δx als unendlich kleine Gröfse erster Ordnung betrachtet.

33. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, die auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen ist (vergleiche Nr. 22). Setzt man $OM = x$, $MP = y$, $MM' = PQ = \Delta x$, $QP' = \Delta y$, so wird $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Tangens des Winkels, welchen die Gerade PP' mit der x-Achse bildet. Läfst man Δx null werden, so konvergiert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn die Funktion $f(x)$ eine Ableitung besitzt, gegen $f'(x)$. Daher konvergiert der Winkel zwischen PP' und der x-Achse gegen einen Grenzwert, und die Gerade PP', welche den Punkt P mit einem andern Punkte P' verbindet, konvergiert gegen eine Grenzlage und der Punkt P' nähert sich unbegrenzt dem Punkte P. Tangente an eine Kurve in einem Kurvenpunkte P nennt man die Grenzlage, gegen welche die Verbindungslinie des Punktes P mit einem andern Kurvenpunkte konvergiert, wenn der zweite Punkt sich unbegrenzt dem ersten nähert. Besitzt deshalb die Funktion $f(x)$ eine Ableitung, so besitzt die Kurve eine Tangente und diese bildet mit der x-Achse einen Winkel α, dessen Tangens durch $\operatorname{tang}\alpha = f'(x)$ bestimmt ist.

Auch in den Fragen der Mechanik hat die Ableitung eine sehr einfache Bedeutung. Nehmen wir an, dafs ein Punkt P eine Gerade durchläuft. Es sei x die Entfernung eines beweglichen Punktes P von einem festen Punkte der Geraden, also die Koordinate von P, und es sei t die Zeit, welche von einem festen Zeitpunkte an bis zu einem veränderlichen Zeitpunkte verflossen ist. Zu jedem Werte von t gehört eine Lage von P und daher ein Wert von x, also wird $x = f(t)$. Die Bewegung des Punktes P heifst gleichförmig, wenn der in einem bestimmten Zeitabschnitte durchlaufene Raum diesem Abschnitte proportional ist. Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung heifst das Verhältnis des durchlaufenen Raumes zu der Zeit, die erforderlich war, um ihn zu durchlaufen. Ist die Bewegung eine beliebige und hat man zu einem gegebenen Werte von t den entsprechenden Wert von x gefunden, so erteile man der Zeit einen Zuwachs Δt; dann erhält x einen Zuwachs Δx, welcher von dem beweglichen Punkte in dem Zeitintervalle Δt durchlaufen ist, das auf den betrachteten Moment folgte. Das Verhältnis $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ stellt die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung dar, welche in der Zeit Δt den Raum Δx durchläuft; man nennt Geschwindigkeit einer beliebigen Bewegung in einem bestimmten Zeitpunkte den Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Also ist die Geschwindigkeit bei einer beliebigen Bewegung die Ableitung des Raumes nach der Zeit.

§ 2. Differentiationsregeln.

34. **Ableitung einer Summe.** Es sei $y = u + v - w$ und es seien u, v, w drei Funktionen, deren Ableitungen $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ sind; dann ist:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Läfst man Δx null werden, so erhält man:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}, \text{ d. h.:}$$

Die Ableitung einer algebraischen Summe von mehreren Funktionen ist gleich der Summe der Ableitungen.

Multipliziert man mit dx, so erhält man:

$$(1) \qquad d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

35. **Ableitung eines Produktes.** Es sei $y = au$, wo a eine Konstante und u eine Funktion von x ist; so wird $\Delta y = a \Delta u$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \Delta u}{\Delta x}$, und, wenn man zur Grenze übergeht, $\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx}$; also wird

(2) $$d(au) = adu, \text{ d. h.:}$$

Die Ableitung des Produktes von einer Konstanten und einer Funktion ist gleich dem Produkte aus der Konstanten und der Ableitung der Funktion.

Es sei jetzt $y = uv$, wo u und v Funktionen von x sind; dann wird:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta x}.$$

Geht man zur Grenze über, so wird $\frac{d(uv)}{dx} = \frac{udv}{dx} + \frac{vdu}{dx}$, und daher:

(3) $$d(uv) = udv + vdu, \text{ d. h.:}$$

Das Differential des Produktes zweier Funktionen ist gleich der Summe der Produkte von jeder Funktion mit dem Differentiale der andern.

Diese letzte Formel kann man auch schreiben:

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Ist y gleich dem Produkte von mehreren Funktionen $u_1 u_2 \cdots u_n$, so wird:

$$\frac{d(u_1 u_2 \cdots u_n)}{u_1 u_2 \cdots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{d(u_2 u_3 \cdots u_n)}{u_2 u_3 \cdots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d(u_3 \cdots u_n)}{u_3 \cdots u_n} =$$
$$= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \cdots + \frac{du_n}{u_n}.$$

Sind die n-Faktoren einer und derselben Funktion u gleich, so wird: $\frac{d(u^n)}{u^n} = n\frac{du}{u}$ oder $d(u^n) = nu^{n-1}du$. Die Ableitung wird $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$. Ist $u = x$, so wird $\frac{du}{dx} = 1$ und daher $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$; d. h.:

(4) $$d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

Nach dieser Formel hat man also eine Potenz mit ganzem positivem Exponenten zu differentiieren.

Die vorhergehenden Formeln ermöglichen es, jede ganze rationale Funktion zu differentiieren. Ist:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

so wird:

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

36. **Ableitung eines Quotienten.** Es sei $y = \frac{u}{v}$ und $v \neq 0$; dann wird:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}, \quad \Delta y = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

geht man zur Grenze über, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ und:

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \tag{5}$$

d. h.:

Das Differential eines Quotienten ist gleich dem Nenner mal dem Differentiale des Zählers weniger dem Zähler mal dem Differentiale des Nenners, alles dividiert durch das Quadrat des Nenners.

Setzt man im besonderen den Zähler konstant gleich 1, so wird $du = 0$ und

$$d \frac{1}{v} = -\frac{dv}{v^2}.$$

Ist $v = x^m$, so wird

$$d \frac{1}{x^m} = d(x^{-m}) = -\frac{m x^{m-1} dx}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} dx.$$

Man erhält dasselbe Resultat aus Formel (4), wenn man dort den Exponenten ganz, aber negativ annimmt.

37. **Ableitung der Funktion einer Funktion.** Es sei $y = f(u)$ und $u = \varphi(x)$; dann ist y vermöge u eine Funktion von x. Man nehme an, dafs die Funktionen $f(u)$ und $\varphi(x)$ eine Ableitung $f'(u)$ und $\varphi'(x)$ besitzen. Erteilt man x den Zuwachs Δx und sind Δu und Δy die zugehörigen Zuwüchse von u und y, so wird:

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Für hinreichend kleine Werte von Δx mit Ausschlufs von

$\Delta x = 0$ werde nun Δu nicht mehr null; dann wird $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$; läfst man Δx null werden, so wird $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ gleich $\varphi'(x) = \frac{du}{dx}$ und Δu wird null; $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ konvergiert aber, wenn Δu nach null konvergiert, gegen $f'(u) = \frac{dy}{du}$, also wird:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ und:}$$

$$dy = f'(u)\varphi'(x)\,dx = f'(u)\,du. \tag{6}$$

Diese Formel ist identisch mit derjenigen, welche dy so definiert, als wäre u die unabhängige Veränderliche; aber hier ist $du = \varphi'(x)\,dx$.

Wird aber, wie klein man auch Δx wählen möge, Δu für jeden Wert von Δx null, so bleibt die vorhergehende Formel trotzdem richtig. In der That, wird Δu für unendlich viele Werte von Δx null, wie klein diese auch sein mögen, so wird $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ für dieselben Werte null und sein Limes wird, wenn er überhaupt existiert, ebenfalls null. Es mufs also dann $\varphi'(x) = 0$ sein.

Lassen wir Δx null werden, indem wir ihm zunächst nur diejenigen Werte erteilen, für welche $\Delta u \neq 0$ ist, so bleibt die frühere Überlegung anwendbar und daher wird

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x) = 0.$$

Geben wir Δx die Werte, für welche $\Delta u = 0$ ist, so wird auch $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ und $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Also ist der Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beständig null, in welcher Weise man auch Δx null werden läfst und die Formel (6) für die Differentiation der Funktion einer Funktion bleibt richtig.

38. **Ableitung einer inversen Funktion.** Es sei x eine Funktion von y, $x = \varphi(y)$; sie heifse *direkte Funktion.* Wir setzen voraus, dafs sie eine inverse Funktion besitzt, d. h. dafs man auch umgekehrt y als Funktion von x betrachten kann: $y = f(x)$. Besitzt $\varphi(y)$ eine von null verschiedene endliche Ableitung, so besitzt auch die inverse Funktion eine von null verschiedene endliche Ableitung. In der That, erteilen wir x

einen Zuwachs Δx und nennen Δy den zugehörigen Zuwachs von y, dann ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Läfst man Δx null werden, so wird auch Δy null und $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ wird $\varphi'(y)$. Also wird $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\varphi'(y)}$ oder

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \text{ d. h.:}$$

Die Ableitung einer inversen Funktion ist der reziproke Wert der Ableitung der direkten Funktion.

Es sei beispielsweise $x = y^m$ und m eine ganze positive Zahl. Läfst man y von 0 bis ∞ variieren, so wächst x stetig von 0 bis ∞. Daher besitzt diese Funktion eine inverse; d. h. zu einem gegebenen positiven Werte von x gehört ein einziger positiver Wert von y, für den $x = y^m$ ist und der durch $y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ bezeichnet wird. Die Anwendung der vorhergehenden Regel ergiebt $\frac{dx}{dy} = my^{m-1}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{my^{m-1}}$. Setzt man für y seinen Wert, so wird:

$$\frac{d\left(x^{\frac{1}{m}}\right)}{dx} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Setzt man andererseits an Stelle von x jetzt u, wo u eine Funktion von x bedeutet, so ergiebt die Regel über Funktionen von Funktionen $d\left(u^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} u^{\frac{1}{m}-1} du$. Setzt man $u = x^n$, wo n eine ganze Zahl ist, so wird:

$$d\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx;$$

also gilt die Formel (4) für die Differentiation einer Potenz auch für rationale Exponenten.

39. **Ableitung von Log x.** Es sei $y = \operatorname{Log} x$, der Logarithmus sei in Bezug auf eine positive Basis a genommen und x sei eine positive Veränderliche. Dann ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}.$$

Setzt man $\frac{h}{x} = \alpha$, so wird $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \operatorname{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Wird α null, so wird:

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad \text{und} \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \operatorname{Log} e$$

oder:

$$\frac{d \operatorname{Log} x}{dx} = \frac{1}{x} \operatorname{Log} e, \quad d \operatorname{Log} x = \frac{dx}{x} \operatorname{Log} e.$$

Sind die Logarithmen natürliche, so wird $\log e = 1$ und:

(8) $$d \log x = \frac{dx}{x}.$$

Diese Formel gilt, welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag.

Beispiele. Es sei:

$$y = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

dann wird:

$$dy = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, d \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, d \frac{1+x}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} dx = \frac{dx}{1-x^2}.$$

Ist

$$y = \log\left(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax + b}\right),$$

so wird:

$$dy = \frac{1 + \frac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax+b}}}{x + a + \sqrt{x^2+2ax+b}}\, dx = \frac{dx}{\sqrt{x^2+2ax+b}}.$$

40. **Ableitung von a^x.** Es sei $y = a^x$; nimmt man die Logarithmen in irgend einer Basis, so wird $\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} a$ und daher

$$x = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} a} \frac{1}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e} = a^x \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e},$$

oder:

$$da^x = a^x \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e} dx = \frac{a^x}{{}^a\operatorname{Log} e} dx = a^x \log a\, dx.$$

Ist $a = e$, so wird:

(9) $$de^x = e^x dx.$$

41. **Ableitung von u^v.** Es sei $y = u^v$, wo u und v Funktionen von x sind und u nur positive Werte annimmt. Es wird $y = e^{v \log u}$ und daher

$$dy = e^{v \log u} d(v \log u) = e^{v \log u}\left(v \frac{du}{u} + \log u dv\right) =$$
$$= vu^{v-1} du + u^v \log u dv.$$

Macht man z. B. u konstant gleich a, so wird $du = 0$ und

$$da^v = a^v \log a\, dv.$$

Dies ist die Formel zur Differentiation von Exponentialfunktionen. Setzt man v konstant $= m$, so wird:

$$du^m = mu^{m-1} du.$$

Dies ist die Formel zur Differentiation einer Potenz. Also gilt (4) für jeden Wert von n.

42. **Ableitung der trigonometrischen Funktionen.** Es sei $y = \sin x$; dann wird:

$$\Delta y = \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin\frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Läſst man h null werden, so wird $\lim \dfrac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = 1$, $\lim \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$, also:

$$(10) \qquad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad d \sin x = \cos x\, dx.$$

Ist $y = \cos x$, so folgt:

$$\Delta y = \cos(x+h) - \cos x = -2 \sin\frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Also wird an der Grenze

$$(11) \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad d \cos x = -\sin x\, dx.$$

Die Ableitung des Cosinus kann man auch dadurch finden, daſs man beachtet, daſs $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ist und daſs man differentiiert nach der Regel über die Funktionen von Funktionen.

Die anderen trigonometrischen Funktionen lassen sich rational durch Sinus und Cosinus ausdrücken; wendet man dann die bekannten Regeln an, so findet man:

$$(12) \qquad d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$(13) \qquad d \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Es sei jetzt $y = \operatorname{arc} \sin x$; x sei zwischen -1 und $+1$, y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten, entsprechend den Verabredungen der Nr. 29. Dann hat man $x = \sin y$, $dx = \cos y dy$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$. Will man die Ableitung als Funktion der unabhängigen Veränderlichen x ausdrücken, so beachte man, daſs $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ist. Dabei muſs man der Wurzel das positive Zeichen geben, weil für $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $\cos y$ positiv ist. Mithin wird:

$$(14) \qquad d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es sei $y = \operatorname{arc} \cos x$; dann wird:

$$x = \cos y, \quad dx = -\sin y\, dy,$$

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dabei muſs man, entsprechend unserer Verabredung, daſs y zwischen 0 und π enthalten sein soll, die Wurzel positiv nehmen.

Ist $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, so hat man:

$$x = \operatorname{tg} y, \quad dx = \frac{dy}{\cos^2 y}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2},$$

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$(16) \quad d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$(17) \quad d \operatorname{arc} \sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Die vorstehenden Formeln gestatten die Ableitung einer jeden Funktion zu berechnen, die durch Anwendungen einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen, Potenzierungen mit irgend einem Exponenten, Logarithmierungen und Bildungen der direkten oder inversen Kreisfunktionen entstanden sind.

§ 3. Sätze über Ableitungen.

43. Eine Funktion $f(x)$ *wächst* an der Stelle $x = x_0$, wenn ihr Zuwachs $f(x_0 + h) - f(x_0)$ für hinreichend kleine $|h|$ im Vorzeichen mit h übereinstimmt, sie *nimmt ab* an der Stelle $x = x_0$, wenn ihr Zuwachs für hinreichend kleine $|h|$ das entgegengesetzte Zeichen wie h hat.

Satz I. Ist die Ableitung positiv, so wächst die Funktion; ist sie negativ, so nimmt die Funktion ab.

In der That, es sei $f(x)$ die Funktion und $f'(x)$ ihre Ableitung; dann wird:

$$\lim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

und daher:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0) + \alpha],$$

wo α mit h unendlich klein wird. Ist nun $f'(x_0)$ nicht null, so kann man α absolut kleiner als $f'(x_0)$ machen, wenn man nur h hinreichend klein macht. Dann hat $f'(x_0) + \alpha$ das Zeichen von $f'(x_0)$ und $f(x_0 + h) - f(x_0)$ das Zeichen von h oder das entgegengesetzte, je nachdem $f'(x_0)$ positiv oder negativ ist. Die Funktion wächst also bei positivem, sie nimmt ab bei negativem $f'(x_0)$.

44. *Satz II* (*von* Rolle). *Ist $f(x)$ eine Funktion von x, die in einem Intervalle (a, b) gegeben ist und für alle Werte x in diesem Intervalle eine endliche Ableitung $f'(x)$ besitzt und ist endlich $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$, so giebt es einen Wert x_1 zwischen a und b, der von a und b verschieden ist und für den die Ableitung verschwindet.*

In der That, einmal kann $f(x)$ für alle Werte x zwischen a und b null sein, und dann ist für jeden Wert von x in demselben Intervalle $f'(x) = 0$. Im allgemeinen aber wird

$f(x)$ auch von null verschiedene Werte annehmen; diese können dann sowohl positiv als negativ sein. Nimmt $f(x)$ positive Werte an, so betrachte man den gröſsten unter ihnen; dieser existiert (vergl. Nr. 21); denn da $f(x)$ eine Ableitung besitzt in dem Intervalle (a, b), so ist es nach Nr. 32 auch stetig. Es sei x_1 ein Wert, für den $f(x)$ ein Maximum wird, dann ist $f(x_1 + h) - f(x_1)$ immer negativ, welches auch h sein mag. Versteht man also jetzt unter h eine positive Gröſse, so ist der Ausdruck $\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h}$ immer positiv oder null, während der Ausdruck $\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ immer negativ oder null ist. Beide müssen aber, wenn h null wird, denselben endlichen Grenzwert ergeben, nämlich $f'(x_1)$. Also ist $f'(x_1) = 0$, w. z. bew. w.

Wenn die Funktion nur negative Werte annimmt, so wird sie ein Minimum für einen Wert x_1 zwischen a und b; durch eine ähnliche Überlegung zeigt man, daſs für diesen Wert die Ableitung verschwindet.

45. *Satz III. Besitzt $f(x)$ für alle Werte x in dem Intervalle (a, b) eine endliche Ableitung, so ist:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1),$$

wo x_1 eine Gröſse zwischen a und b ist.

In der That, man betrachte die Funktion

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}[f(b) - f(a)];$$

sie wird null für $x = a$ und $x = b$; sie besitzt überdies eine Ableitung $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ für alle Werte x zwischen a und b. Daher giebt es einen Wert x_1 zwischen a und b, für welchen $F'(x_1) = 0$, also $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ wird. Die vorstehende Formel läſst sich verschieden schreiben. Man setze $b = a + h$; da x_1 zwischen a und b enthalten ist, so kann man es auf die Form bringen $x_1 = a + \theta h$, wo θ eine Gröſse zwischen 0 und 1 ausschlieſslich der Grenzen bedeutet. Durch Multiplikation mit h ergiebt sich daher:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h);$$

eine sehr wichtige Formel, welche unter der Voraussetzung gilt, dafs $f(x)$ für alle Werte x zwischen a und $a+h$ eine endliche Ableitung besitzt.

Man kann den vorstehenden Satz verallgemeinern.

Es seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ Funktionen, die in dem Intervalle (a, b) eine endliche Ableitung besitzen und man nehme an, dafs $\varphi'(x)$ für keinen Wert von x innerhalb desselben Intervalles verschwindet, man lasse aber zu, dafs es an den Enden $x=a$ und $x=b$ verschwinden darf.

Man betrachte die Funktion

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)];$$

dann ist $F(a)=0$, $F(b)=0$, $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$. Daher giebt es einen Wert x_1 zwischen a und b, für welchen $F'(x)=0$, oder $f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x_1)$ wird; dividiert man durch $\varphi'(x)$, welches nicht null ist, so erhält man

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}.$$

Setzt man in dieser Formel $b=a+h$, $x_1=a+\theta h$, so wird:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

46. *Satz IV. Wenn die Ableitung einer Funktion für alle Werte x im Innern des Intervalles null ist, so hat in ihm $f(x)$ einen konstanten Wert.*

In der That, ist a ein Wert von x in dem gegebenen Intervalle, $a+h$ ein zweiter Wert von x in demselben Intervalle, so ist:

$$f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h).$$

Da $a+\theta h$ ebenfalls in dem gegebenen Intervalle liegt, so ist $f'(a+\theta h)=0$ und $f(a+h)=f(a)$ konstant in dem Intervalle.

Satz V. Haben zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in einem gegebenen Intervalle gleiche Ableitungen, so ist ihre Differenz konstant.

In der That, man setze $F(x)=f(x)-\varphi(x)$; dann wird $F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)=0$ und daher ist $F(x)$ konstant.

§ 4. **Höhere Ableitungen.**

47. Besitzt eine Funktion $f(x)$ für die Werte x eines bestimmten Intervalles eine endliche Ableitung $f'(x)$, so ist

$f'(x)$ im Allgemeinen eine neue Funktion von x, welche eine Ableitung besitzen kann. Man bezeichnet diese durch $f''(x)$ und nennt sie die zweite Ableitung von $f(x)$, indem man $f'(x)$ als erste Ableitung bezeichnet.

Die Ableitung der zweiten Ableitung heifst dritte Ableitung, sie wird durch $f'''(x)$ bezeichnet u. s. w. Die n^{te} Ableitung wird durch $f^{(n)}(x)$ bezeichnet. Man erhält die successiven Ableitungen der im Vorstehenden behandelten Funktionen durch wiederholte Anwendung der Differentiationsregeln des § 2.

Beispiele. 1) Ist $y = x^m$, so wird:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \cdots$$
$$y^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so ist die m^{te} Ableitung konstant und gleich $m!$, die folgenden Ableitungen sind null. In allen anderen Fällen sind unendlich viele Ableitungen vorhanden, die sämtlich Funktionen von x sind.

2) Ist $y = \operatorname{Log} x$, so wird:

$$y' = \frac{1}{x}\operatorname{Log} e, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}\operatorname{Log} e, \cdots$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}\operatorname{Log} e.$$

3) Ist $y = \sin x$, so wird:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{\mathrm{IV}} = \sin x, \cdots$$

Die Werte wiederholen sich also periodisch. Man kann auch schreiben:

$$y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \sin\left(y + \frac{2\pi}{2}\right), \cdots$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

4) Ist $y = a^x$, so wird $y' = a^x \log a$, $y'' = a^x(\log a)^2, \cdots$
$$y^{(n)} = a^x(\log a)^n.$$

48. n^{tes} Differential oder Differential n^{ter} Ordnung einer Funktion y heifst das Produkt aus der n^{ten} Potenz des Differentiales der unabhängigen Veränderlichen und der n^{ten} Ableitung der Funktion. Die n^{te} Potenz von dx wird durch dx^n bezeichnet (während $d(x^n)$ das Differential von x^n bedeutet,

also $nx^{n-1}dx$), und das n^{te} Differential von y wird durch $d^n y$ bezeichnet. Also ist, wenn $y = f(x)$ gesetzt wird:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

und daher

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Diese Bezeichnungsweise ist sehr gebräuchlich, um die successiven Ableitungen darzustellen. Differentiieren wir in der Gleichung $dy = f'(x)dx$ beide Seiten und betrachten dx als konstant, so erhalten wir $ddy = f''(x)dx^2$ oder $ddy = d^2y$; analog wird $dd^2y = d^3y$ u. s. w. Irgend ein Differential von beliebig hoher Ordnung wird also erhalten, indem man das vorhergehende Differential differentiiert und dx als konstant betrachtet.

§ 5. Übungen.

49. 1) Die folgenden Funktionen sind zu differentiieren:

$$x^x,\quad x^{\sin x},\quad e^{\sin x},\quad e^{\arcsin x},\quad x^{\frac{1}{x}},\quad \log\cos x,\quad \log \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\log\log x,\quad \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}.$$

2) Die Funktion $x - \log(1+x)$ soll differentiiert und aus dem Vorzeichen der Ableitung hergeleitet werden, dafs für alle positiven Werte von x, $x > \log(1+x)$ ist.

3) Ein einfaches Mittel zur Auffindung von Identitäten besteht darin, dafs man eine und dieselbe Funktion, wenn möglich, auf verschiedene Formen bringt oder verschiedene Differentiationsmethoden anwendet. So hat man z. B.:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

und erhält hieraus durch Differentiation nach x:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

4) Erhebt man $(a+x)$ zur n^{ten} Potenz, so ergiebt sich ein Resultat der Form:

$$(a+x)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n.$$

Durch Differentiation folgt:

$$(*)\qquad n(a+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1}$$
$$n(n-1)(a+x)^{n-2} = 2A_2 + \cdots + n(n-1)A_nx^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n(n-1)\cdots(n-r+1)(a+x)^{n-r} =$$
$$= r!A_r + \cdots + n(n-1)\cdots(n-r+1)A_nx^{n-r}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n! = n!A_n.$$

Setzt man in diesen Formeln $x = 0$, so erhält man so viele Gleichungen als Koeffizienten $A_0, A_1 \cdots A_n$ und findet:

$$A_0 = a^n,\quad A_1 = na^{n-1},\quad A_2 = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2},\ \cdots$$
$$A_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^r,\ \cdots\ A_n = 1.$$

Auf diese Weise ist der binomische Satz von Newton für ganze positive Exponenten n erwiesen.

Dieselbe Formel kann man beweisen, indem man (*) mit $(a+x)$ multipliziert und die Koeffizienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten gleichsetzt.

Man würde in ähnlicher Weise den Taylorschen Satz für ganze rationale Funktionen von x beweisen.

5) Aus der Gleichung:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

welche für jedes von 1 verschiedene x gilt, findet man durch Differentiation und darauf folgende Multiplikation mit x:

$$x + 2x^2 + \cdots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

Durch weitere Differentiation kann man hieraus der Reihe nach die Summen erhalten:

$1^2x + 2^2x^2 + \cdots + n^2x^n,\quad 1^3x + 2^3x^2 + \cdots + n^3x^n,$ u. s. w.

immer unter der Voraussetzung $x \neq 1$.

Setzt man in diesen Ausdrücken $x = 1$, so stehen links die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen, aber die rechten Seiten erhalten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

6) Man wähle $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; diese Funktion ist für alle Werte von x definiert und stetig. Ihre Ableitung für $x = 0$ ist

der Grenzwert von $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ oder von $h^{-\frac{1}{3}}$. Aber $h^{-\frac{1}{3}}$ wächst mit verschwindendem h unbegrenzt und ist positiv, wenn h vom Positiven her in die Null rückt, es wird negativ, wenn h vom Negativen her in die Null rückt. Also hat $f(x)$ keine endliche Ableitung für $x = 0$.

7) Die Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, der man für $x = 0$ den Wert $f(0) = 0$ zuerteilt, ist stetig. Ihre Ableitung für $x = 0$ ist der Grenzwert von $\frac{f(h)-f(0)}{h}$, also der von $\sin \frac{1}{h}$ für $h = 0$. Da aber $\sin \frac{1}{h}$ für verschwindendes h überhaupt keinen Grenzwert hat, so hat die Funktion $x \sin \frac{1}{x}$ auch keine Ableitung an der Stelle $x = 0$.

8) Die Funktion $y = x \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$ ist stetig, wenn man ihr für $x = 0$ den Wert 0 zuerteilt. Sucht man die Ableitung und bildet $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so ist dessen Grenzwert 1 oder -1 für $x = 0$, je nachdem Δx negative oder positive Werte erhält. Diese Funktion hat also keine Ableitung für $x = 0$.

9) Ist $f(x)$ für alle Werte x eines gegebenen Intervalles stetig und besitzt es dort eine bestimmte endliche Ableitung, so ist es im allgemeinen nicht richtig, dafs dann diese Ableitung in dem gegebenen Intervalle ebenfalls stetig ist. So ist $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, wenn man $f(0) = 0$ nimmt, eine stetige Funktion von x und besitzt für alle Werte x eine endliche Ableitung. Denn ist x von null verschieden, so erhält man die Ableitung nach den bekannten Regeln:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Für $x = 0$ ergiebt sich die Ableitung aus ihrer Definition:

$$f'(0) = \lim \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Nichtsdestoweniger ist $f'(x)$ diskontinuierlich für $x = 0$, da mit verschwindendem x die Funktion $f'(x)$ überhaupt gegen keinen Grenzwert konvergiert; der erste Summand wird zwar null, aber der zweite schwankt unbegrenzt zwischen -1 und $+1$ hin und her.

Gleichwohl können wir die folgenden Sätze [10)—14)] beweisen.

10) *Besitzt $f(x)$ in einem gegebenen Intervalle eine Ableitung $f'(x)$ und konvergiert $f'(x)$, wenn $x = a$ wird, gegen einen Grenzwert A, so ist dieser Grenzwert der Wert, welchen die Ableitung für $x = a$ annimmt, es ist also $A = f'(a)$.*

In der That, man hat $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$. Mit verschwindendem h wird $a + \theta h$ gleich a und $f'(a+\theta h)$ gleich A. Auch $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $f'(a)$; also ist $f'(a) = A$.

Ist also $f(x)$ diskontinuierlich für $x = a$, so kann $f'(x)$, wenn x gegen a konvergiert, überhaupt keinen Grenzwert erhalten.

11) *Besitzt $f(x)$ in einem bestimmten, den Wert a einschliefsenden Intervalle eine Ableitung, so nimmt $f'(x)$ unendlich oft Werte an, die beliebig nahe an $f'(a)$ liegen; d. h. fixiert man eine beliebig kleine positive Zahl ε, so kann man ein Intervall um a bestimmen, sodafs in ihm $f'(x)$ unendlich viele Werte annimmt, die von $f'(a)$ um weniger als ε abweichen.*

12) *Besitzt $f(x)$ eine endliche Ableitung in dem Intervalle (a, b), und haben $f'(a)$ und $f'(b)$ entgegengesetztes Zeichen, so giebt es einen Wert x zwischen a und b, für welchen die Ableitung verschwindet.*

13) *$f(x)$ besitze eine Ableitung im Intervalle (a, b) und es sei $f'(a) = A$, $f'(b) = B$. Läfst man x das Intervall durchlaufen, so nimmt $f'(x)$ alle Werte zwischen A und B an.*

14) *Besitzt $f(x)$ eine Ableitung $f'(x)$ in dem Intervalle (a, b) und kann man in einer beliebig fixierten Gröfse ε ein τ bestimmen, sodafs für jeden Wert von x im Intervalle und jedes $|h| < \tau$ der Ausdruck $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$ wird, so ist die Ableitung eine stetige Funktion und umgekehrt.*

15) Es sollen die Formeln bewiesen werden:

$$d^n(u + v) = d^n u + d^n v$$
$$d^n(au) = a d^n u$$
$$d^n(au + bv) = a d^n u + b d^n v,$$

in denen u und v Funktionen von x, a und b Konstante bedeuten.

16) Sind u und v zwei Funktionen von x, so hat man:

$$d^n(uv) = u d^n v + \binom{n}{1} du\, d^{n-1}v + \binom{n}{2} d^2u\, d^{n-2}v + \cdots + v d^n u.$$

Die Koeffizienten der Glieder sind diejenigen, welche beim binomischen Satze auftreten. Daher läſst sich die vorige Formel symbolisch schreiben:

$$d^n(uv) = (du + dv)^n.$$

Dies besagt, daſs man $(du + dv)^n$ nach dem binomischen Satze entwickeln und im ersten und letzten Gliede die 0^{te} Potenz von du bezw. dv mitschreiben soll. Schreibt man dann $d^\alpha u$ und $d^\beta v$ für du^α und dv^β, und setzt $u = d^0 u$, $v = d^0 v$, so entsteht $d^n(uv)$.

Ähnlich ergiebt sich symbolisch:

$$d^n(uvw \cdots t) = (du + dv + \cdots + dt)^n.$$

17) Man setze $u_0 = u$, $u_1 = \frac{u'}{1}$, $\cdots u_n = \frac{u^{(n)}}{n!}$ und gebrauche analoge Bezeichnungen für v und y.

Ist $y = uv$, so erhält man aus der vorigen Nummer die Gleichung:

$$y_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0.$$

18) Es sei $y = \frac{u}{v}$; dann hat man $u = vy$. Differentiiert man diese Gleichung und bedient sich der Bezeichnungen von Nr. 17, so entstehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
u_0 &= v_0 y_0 \\
u_1 &= v_1 y_0 + v_0 y_1 \\
u_2 &= v_2 y_0 + v_1 y_1 + v_0 y_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
u_{n-1} &= v_{n-1} y_0 + v_{n-2} y_1 + v_{n-3} y_2 + \cdots + v_0 y_{n-1} \\
u_n &= v_n y_0 + v_{n-1} y_1 + v_{n-2} y_2 + \cdots + v_1 y_{n-1} + v_0 y_n.
\end{aligned}$$

Aus ihnen kann man der Reihe nach $y_0, y_1, \cdots y_n$ durch die Ableitungen von u und v ausdrücken. Löst man das Gleichungssystem mit Hülfe der Determinantentheorie auf, so erhält man:

$$y_n = \frac{1}{v_0^{n+1}} \begin{vmatrix} v_0 & 0 & 0 & \cdots 0 & u_0 \\ v_1 & v_0 & 0 & \cdots 0 & u_1 \\ v_2 & v_1 & v_0 & \cdots 0 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n-1} & v_{n-2} & v_{n-3} & \cdots v_0 & u_{n-1} \\ v_n & v_{n-1} & v_{n-2} & \cdots v_1 & u_n \end{vmatrix}.$$

Dies kann man auch schreiben:

$$y_n = \frac{u_n}{v_0} - \frac{u_{n-1}}{v_0^2} v_1 + \frac{u_{n-2}}{v_0^3} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 \\ v_2 & v_1 \end{vmatrix} - \frac{u_{n-3}}{v_0^4} \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_0 & 0 \\ v_2 & v_1 & v_0 \\ v_3 & v_2 & v_1 \end{vmatrix} + \cdots.$$

19) Es sei $y = F(u)$ und $u = \varphi(x)$, also y eine Funktion von x vermöge u. Man hat:

$$\frac{dy}{dx} = F'(u)\varphi'(x) = F'(u)u'.$$

Differentiiert man diese Gleichung mehrmals, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F'(u) \cdot u'' + F''(u) \cdot u'^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F'(u) \cdot u''' + F''(u) 3u'u'' + F'''(u) \cdot u'^3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = F'(u) \cdot u^{IV} + F''(u)(4u'u''' + 3u''^2) + \\ + F'''(u) 6u'^2u'' + F^{IV}(u) \cdot u'^4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese Ergebnisse sind in der Formel enthalten:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sum \frac{n!\,F^{(r)}(u)}{\alpha!\,\beta!\cdots\lambda!} \left(\frac{u'}{1!}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{u''}{2!}\right)^\beta \cdots \left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^\lambda,$$

in welcher die Summe rechter Hand über alle Glieder auszudehnen ist, die man erhält, wenn man r alle Werte von $1, 2, \cdots n$ und $\alpha, \beta \cdots \lambda$ alle ganzen positiven Werte einschliefslich der Null erteilt, dabei aber die Bedingungen berücksichtigt:

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = r, \quad \alpha + 2\beta + \cdots + n\lambda = n.$$

Verifiziert man diese Formel für $n = 1, 2, \cdots$, so läſst sich leicht weiter zeigen, daſs sie für $n + 1$ gilt, wenn sie für n gilt.

20) In besonderen Fällen kann man die Ableitung n^{ter} Ordnung einer Funktion durch besondere Kunstgriffe bestimmen. Es sei $y = \frac{1}{1 - x^2}$; dann kann man schreiben

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

und erhält durch eine n-malige Differentiation:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right].$$

21) Es sei $y = \operatorname{arc\,tg} x$. Man hat $y' = \frac{1}{1 + x^2}$. Drückt man diese Ableitung als Funktion von y aus, so wird $y' = \cos^2 y$. Durch successive Differentiation entsteht die Formel:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Drittes Kapitel.

Von den Reihen.

§ 1. Definition der Reihen.

50. *Reihe* heifst eine Aufeinanderfolge von unendlich vielen Zahlen $u_0 u_1 u_2 \ldots$, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind. Die Zahlen u heifsen die *Glieder* der Reihe, u_n heifst das *allgemeine* Glied; es ist eine Funktion des Index n. Ist u_n als Funktion von n gegeben, so genügt es, $n = 0, 1, 2, \ldots$ zu setzen, um so viele Glieder der Reihe zu bekommen, als man will. Aber das Bildungsgesetz der Reihe kann auch auf andere Art bestimmt sein.

Eine Reihe heifst *konvergent*, wenn die Summe der n ersten Reihenglieder mit unbegrenzt wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert und dieser Grenzwert heifst die *Summe der Reihe*. Eine Reihe, die nicht konvergiert, heifst *divergent*.

Die Summe der n ersten Reihenglieder pflegt man durch s_n zu bezeichnen; es ist also:

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}.$$

Die Summe der konvergenten Reihe bezeichnet man mit s, es ist also $s = \lim\limits_{n=\infty} s_n$. Man schreibt auch:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

Hört man beim n^{ten} Gliede einer konvergenten Reihe auf, so heifst die Differenz zwischen dem Grenzwerte s und der Summe s_n der *Rest* der Reihe; bezeichnet man ihn durch r_n, so wird daher

$$s = s_n + r_n.$$

Mit unbegrenzt wachsendem n wird $r_n = 0$.

51. Als Beispiel einer Reihe kann man die geometrische Progression betrachten:

$$a, \quad ax, \quad ax^2, \ldots, \quad ax^n, \ldots$$

In ihr ist $s_n = a + ax + \cdots + ax^{n-1}$, und, wenn x von 1 verschieden ist, so wird:

$$s_n = a \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}.$$

Ist x absolut kleiner als 1, so erhält x^n mit unbegrenzt wachsendem n den Grenzwert null; also konvergiert s_n gegen eine Grenze. Die Reihe ist demnach konvergent und hat zur Summe $s = \frac{a}{1-x}$; ihr Rest ist $r_n = \frac{ax^n}{1-x}$.

Ist x absolut gröfser als 1, so wächst $|x^n|$ mit wachsendem n unbegrenzt und dasselbe geschieht mit s_n. Die Reihe ist also dann divergent, vorausgesetzt dafs $a \neq 0$ ist.

Ist $x = 1$, so entsteht die Reihe $a, a, a, \ldots$. Es wird $s_n = na$, mit wachsendem n wird also s_n unbegrenzt grofs und die Reihe ist divergent. Ist $x = -1$, so entsteht die Reihe $a, -a, a, -a, \ldots$. Man erhält $s_n = a$ oder $= 0$, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Also hat dann s_n überhaupt keine Grenzwerte; die Reihe ist wieder divergent.

§ 2. Sätze über Reihen.

52. *Satz. Multipliziert man die Glieder einer konvergenten Reihe mit einer Gröfse a, so ist die neue Reihe wieder konvergent und ihre Summe ist das a-fache von der Summe der ursprünglichen Reihe.*

Es sei

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots$$

die vorgelegte Reihe. Dann ist die Reihe, deren Glieder das a-fache der Glieder jener Reihe sind:

$$au_0, \quad au_1, \quad au_2, \ldots$$

Setzt man:

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

und:

$$s_n' = au_0 + au_1 + \cdots + au_{n-1},$$

so wird

$$s_n' = as_n.$$

Wächst n unbegrenzt, so konvergiert s_n gegen s, die Summe der vorgelegten Reihe, und daher wird $\lim s_n' = as$. Hiermit ist der Satz bewiesen.

53. *Satz. Addiert man die entsprechenden Glieder zweier konvergenter Reihen, so entsteht wieder eine konvergente Reihe, deren Summe gleich der Summe der Summen der beiden ersten Reihen ist.*

Es seien

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots \quad \text{und} \quad v_0, \quad v_1, \quad v_2, \ldots$$

die beiden gegebenen Reihen. Dann ist:

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \quad s_n' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$
$$\lim s_n = s, \quad \lim s_n' = s'.$$

Die Reihe, welche durch Addition der entsprechenden Glieder der u- und v-Reihe entsteht, ist:

$$u_0 + v_0, \quad u_1 + v_1, \quad u_2 + v_2, \ldots$$

Setzt man

$$s_n'' = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_{n-1} + v_{n-1}),$$

so wird

$$s_n'' = s_n + s_n'.$$

Da nun $\lim s_n = s$, $\lim s_n' = s'$ ist, so folgt auch, daſs $\lim s_n'' = s + s'$ wird, wie behauptet war.

54. *Satz. Aus einer konvergenten Reihe entsteht wieder eine konvergente Reihe, wenn man eine endliche Anzahl der ersten Glieder fortläſst und umgekehrt.*

Um mit anderen Worten über Konvergenz und Divergenz einer Reihe zu entscheiden, darf man von einer endlichen Anzahl der ersten Glieder absehen.

Es sei $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die Reihe. Läſst man die m ersten Glieder fort, so entsteht die Reihe $u_m, u_{m+1}, \ldots$ Man setze:

$$s_{m+n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+n-1}$$
$$s_n' = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+n-1}$$

und

$$A = u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1};$$

dann wird:

$$s_{m+n} = A + s_n' \quad \text{und} \quad s_n' = s_{m+n} - A.$$

Ist daher die erste Reihe konvergent, hat also s_{m+n} einen endlichen Grenzwert, so gilt Gleiches von $s'_n = s_{m+n} - A$; es ist also auch die zweite Reihe konvergent und umgekehrt.

55. *Satz. In einer konvergenten Reihe ist der Grenzwert des allgemeinen Gliedes bei unbegrenzt wachsendem n die Null.*

In der That, es sei $u_0, u_1, u_2 \ldots$ die konvergente Reihe und

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1},$$

dann wird:

$$s_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Nun ist aber $u_n = s_{n+1} - s_n$, $\lim s_n = s$, $\lim s_{n+1} = s$ und daher $\lim u_n = 0$.

Die Bedingung $u_n = 0$ ist also notwendig für die Konvergenz, sie ist aber nicht hinreichend, wie wir bald an Beispielen sehen werden.

56. *Satz. Ist eine Reihe konvergent, so kann man zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl N bestimmen, sodafs für jeden Wert $n \geqq N$ und für jedes p*

$$| u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} | < \varepsilon$$

wird. Umgekehrt, ist diese Bedingung erfüllt, so konvergiert die Reihe.

In der That, ist die Reihe konvergent, so konvergiert s_n mit wachsendem n gegen einen Grenzwert; nach Nr. 15 kann man daher zu einer beliebig fixierten positiven Gröfse ε eine Zahl N bestimmen, sodafs

$$| s_{n+p} - s_n | = | u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} | < \varepsilon$$

wird für alle Werte n, die N übersteigen und umgekehrt.

§ 3. Reihen mit positiven Gliedern.

57. Sind die Glieder $u_0 u_1 u_2 \ldots$ der Reihe alle positiv, so wächst s_n beständig mit wachsendem n. Daher strebt s_n gegen einen Grenzwert oder nicht, je nachdem s_n nicht unbegrenzt wächst oder unbegrenzt wächst. Zur Entscheidung über die Konvergenz dienen in diesem Falle die folgenden Sätze.

Satz. Wenn eine Reihe mit lauter positiven Gliedern von einer bestimmten Stelle an lauter Glieder hat, die kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer anderen Reihe, so konvergiert die erste Reihe, sobald man dies von der zweiten weifs.

Es seien $u_0, u_1, u_2 \ldots$ und $v_0, v_1, v_2 \ldots$ die beiden Reihen mit positiven Gliedern und es sei $u_0 < v_0$, $u_1 < v_1, \ldots$; dies bedeutet, daſs die in unserm Satze ausgesprochene Bedingung schon vom ersten Gliede an erfüllt ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man von den Anfangsgliedern absehen, welche jener Bedingung nicht entsprechen.

Setzt man:

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

und

$$s_n' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1},$$

so wird $s_n < s_n'$. Da nun die zweite Reihe konvergieren soll, so wächst s_n' beständig mit wachsendem n, indem es sich der oberen Grenze s' nähert.

Daher ist $s_n' < s'$ und umsomehr $s_n < s'$. Daher wächst s_n beständig mit wachsendem n, es bleibt jedoch kleiner als eine endliche Gröſse s'; es hat also einen endlichen Grenzwert, der kleiner ist als s'. Mithin konvergiert die erste Reihe, und ihre Summe ist kleiner als die Summe der zweiten Reihe.

Korollar. *Hat man zwei Reihen mit positiven Gliedern* $u_0, u_1, u_2 \ldots$ *und* $v_0, v_1, v_2 \ldots$ *und ist von einer bestimmten Stelle an immer* $v_n > u_n$, *so ist die zweite Reihe divergent, sobald die erste divergiert.*

58. *Satz. Eine Reihe mit positiven Gliedern* $u_0, u_1, \ldots$ *ist konvergent, wenn von einer bestimmten Stelle an* $\sqrt[n]{u_n}$ *kleiner bleibt, als ein echter Bruch* h; *sie ist auch konvergent, wenn* $\sqrt[n]{u_n}$ *einen Grenzwert hat, der kleiner ist als Eins.*

In der That, ist $\sqrt[n]{u_n} < h$, so ist auch $u_n < h^n$ und die Glieder der vorgelegten Reihe sind von einer bestimmten Stelle an kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe $1, h, h^2, \ldots$. Diese aber ist konvergent, da $h < 1$ ist; mithin konvergiert auch die vorgelegte Reihe.

Wenn $\sqrt[n]{u_n}$ gegen einen Grenzwert $l < 1$ konvergiert, so kann man zu einer willkürlich zwischen l und 1 gewählten Gröſse h einen Wert von n finden, von dem an $\sqrt[n]{u_n}$ sich von l um weniger als $h - l$ unterscheidet. Dann wird aber $\sqrt[n]{u_n} < h < l$ und wir kommen auf den früheren Fall zurück.

Korollar. *Eine Reihe ist divergent, wenn* $\sqrt[n]{u_n}$ *von einem bestimmten Werte von n an gröfser ist als* 1.

Denn dann wird auch $u_n > 1$ und die einzelnen Glieder nehmen nicht unbegrenzt ab.

59. *Satz. Eine Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn das Verhältnis eines Gliedes zum vorhergehenden von einer bestimmten Stelle an beständig kleiner bleibt als ein echter Bruch h, oder wenn jenes Verhältnis gegen einen Grenzwert konvergiert, der kleiner ist als Eins.*

Es sei $u_0, u_1, u_2 \ldots$ die vorgelegte Reihe. Nimmt man wieder an, was erlaubt ist, dafs die ausgesprochene Bedingung vom ersten Gliede an erfüllt ist, so wird

$$\frac{u_1}{u_0} < h, \quad \frac{u_2}{u_1} < h, \quad \cdots \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} < h;$$

hieraus folgt

$$u_1 < hu_0, \quad u_2 < hu_1 < h^2 u_0, \quad \ldots, \quad u_n < h^n u_0.$$

Daher sind alle Glieder der Reihe mit Ausnahme des ersten kleiner als die entsprechenden der Reihe $u_0, hu_0, h^2 u_0 \ldots$. Da diese aber konvergiert, so konvergiert auch die vorgelegte Reihe.

Wenn der Grenzwert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner als Eins wird, so kann man wie beim vorhergehenden Satze schliefsen. Man kann auch bemerken, dafs $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_n}$ ist. (Vergl. Nr. 31 II. Teil der Übung 7.)

Korollar. *Ist das Verhältnis eines Gliedes zum vorhergehenden von einer bestimmten Stelle an gröfser als Eins, so ist die Reihe divergent.*

In der That, ihre Glieder wachsen und konvergieren nicht gegen null.

60. Nimmt man die Bedingung des vorhergehenden Satzes als erfüllt an, so kann man den Rest der Reihe abschätzen, die beim n^{ten} Gliede abgebrochen wird. In der That, man hat

$$r_n = u_n + u_{n+1} + \cdots;$$

ist nun das Verhältnis eines Gliedes zum vorhergehenden $\leqq h < 1$, so wird

$$u_{n+1} \leqq hu_n, \quad u_{n+2} \leqq h^2 u_n, \ldots$$

Also sind die Glieder der Reihe für r_n nicht gröfser als die der Reihe

$$u_n, \quad h u_n, \quad h^2 u_n, \ldots$$

Diese ist aber konvergent und hat zur Summe $\frac{u_n}{1-h}$; daher wird

$$r_n < \frac{u_n}{1-h}.$$

Das Konvergenzkriterium, welches durch den Grenzwert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ geliefert wird, ist eins der fruchtbarsten in den Anwendungen.

Betrachten wir z. B. die Reihe

$$x, \quad 2x^2, \quad 3x^3, \ldots; \quad u_n = n x^n, \quad u_{n+1} = (n+1) x^{n+1},$$

so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x.$$

Wächst n unbegrenzt, so wird $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$. Ist daher $x < 1$, so konvergiert die vorgelegte Reihe; ist dagegen $x > 1$, so divergiert sie. Ist $x = 1$, so wird das Verhältnis

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n};$$

dies ist aber gröfser als eins und die Reihe ist daher divergent.

Hat man die Reihe

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{x^2}{2}, \quad \frac{x^3}{3}, \ldots; \quad u_n = \frac{x^n}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

so wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} x = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

Die Reihe ist konvergent oder divergent, je nachdem $|x|$ kleiner oder gröfser ist als 1. Ist $x = 1$, so wird $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}$; dieser Ausdruck ist immer kleiner als Eins, aber, da sein Grenzwert gleich Eins ist, so giebt es keine Gröfse $h < 1$, sodafs $\frac{u_{n+1}}{u_n} < h$ wird. Die in diesem Falle entstehende Reihe $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ heifst die harmonische. Aus dem vorhergehenden Satze kann man jedoch keine Schlüsse über ihre Konvergenz oder Divergenz ableiten; später werden wir sehen, dafs sie divergiert.

Hat man die Reihe

$$1,\ \frac{x}{1!},\ \frac{x^2}{2!},\ \ldots;\quad u_n = \frac{x^n}{n!},\quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

so wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \quad \text{und} \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0;$$

die Reihe konvergiert daher für jedes positive x.

Das vorhergehende Kriterium verliert also seine Gültigkeit, wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ den Grenzwert 1 erhält, wenn auch dieser Ausdruck beständig kleiner bleibt als sein Grenzwert, wie das für die harmonische Reihe soeben der Fall war, und wie es auch in der allgemeineren Reihe der Fall ist, in der

$$u_n = \frac{1}{(a+n)^{1+\alpha}}.$$

In diesen Fällen mufs man auf andere Kriterien zurückgreifen.

61. *Satz. Ist a eine positive Konstante und bildet man die Reihe, deren allgemeines Glied* $\frac{1}{(a+n)^{1+\alpha}}$ *ist, so divergiert diese, wenn* α *negativ oder null ist; sie konvergiert, wenn* α *positiv ist.*

Man nehme zunächst an, es sei $\alpha = 0$; dann entsteht die Reihe

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+1},\ \frac{1}{a+2},\ \ldots.$$

Man betrachte jetzt die Funktion $F(x) = \log(a+x)$; dann wird $F'(x) = \frac{1}{a+x}$; aus der Formel

$$F(x+1) - F(x) = F'(x+\theta),$$

in der $0 < \theta < 1$ ist, findet man aber

$$\log(a+x+1) - \log(a+x) = \frac{1}{a+x+\theta}.$$

Setzt man auf der rechten Seite für θ seine Extremwerte 0 und 1, so entstehen die Ungleichheiten

$$\log(a+x+1)-\log(a+x)<\frac{1}{a+x}$$

$$\log(a+x+1)-\log(a+x)>\frac{1}{a+x+1}.$$

Setzt man in der ersten Ungleichung, die wir allein hier benutzen, $x=0, 1, 2\cdots n-1$, so erhält man:

$$\log(a+1)-\log a<\frac{1}{a}$$

$$\log(a+2)-\log(a+1)<\frac{1}{a+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log(a+n)-\log(a+n-1)<\frac{1}{a+n-1}.$$

Summiert man diese Ungleichungen und setzt

$$s_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots+\frac{1}{a+n-1},$$

so erhält man

$$s_n>\log(a+n)-\log a.$$

Da nun mit unbegrenzt wachsendem n auch $\log(a+n)$ unbegrenzt wächst, so gilt Gleiches von s_n; die betrachtete Reihe ist daher für $\alpha=0$ divergent.

In dem besonderen Falle, daſs $a=1$ ist, entsteht die harmonische Reihe, auch diese ist also divergent.

Nehmen wir jetzt $\alpha<0$ an; dann wird

$$(a+n)^{1+\alpha}<a+n \quad \text{und} \quad \frac{1}{(a+n)^{1+\alpha}}>\frac{1}{a+n}.$$

Daher sind die Glieder der vorgelegten Reihe gröſser als die Glieder derjenigen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{a+n}$ ist. Da diese aber divergiert, so ist auch vorgelegte Reihe für $\alpha<0$ divergent. Also ist beispielsweise die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cdots$$

divergent.

Man nehme endlich $\alpha>0$ und betrachte die Funktion

$$F(x)=-\frac{1}{\alpha(a+x)^{\alpha}};$$

dann wird

$$F'(x)=\frac{1}{(a+x)^{1+\alpha}}.$$

Greift man jetzt auf die Formel $F(x+1) - F(x) = F'(x+\theta)$ zurück, so erhält man

$$\frac{1}{\alpha(a+x)^\alpha} - \frac{1}{\alpha(a+x+1)^\alpha} = \frac{1}{(a+x+\theta)^{1+\alpha}}.$$

Setzt man 1 an Stelle von θ, so verkleinert sich die rechte Seite und daher wird

$$\frac{1}{(a+x+1)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha(a+x)^\alpha} - \frac{1}{\alpha(a+x+1)^\alpha}.$$

Setzt man in dieser Ungleichung $x = 0, 1, 2 \ldots n-2$, so erhält man

$$\frac{1}{(a+1)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha a^\alpha} - \frac{1}{\alpha(a+1)^\alpha}$$

$$\frac{1}{(a+2)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha(a+1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha(a+2)^\alpha}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1}{(a+n-1)^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha(a+n-2)^\alpha} - \frac{1}{\alpha(a+n-1)^\alpha}.$$

Addiert man diese Ungleichungen, nachdem man auf beiden Seiten noch das Glied $\frac{1}{a^{1+\alpha}}$ hinzugefügt hat, und setzt:

$$s_n = \frac{1}{a^{1+\alpha}} + \frac{1}{(a+1)^{1+\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)^{1+\alpha}},$$

so findet man:

$$s_n < \frac{1}{\alpha a^\alpha} - \frac{1}{\alpha(a+n-1)^\alpha} + \frac{1}{a^{1+\alpha}}$$

und um so mehr:

$$s_n < \frac{1}{\alpha a^\alpha} + \frac{1}{a^{1+\alpha}}.$$

Daher wächst s_n mit wachsendem n zwar beständig, aber nicht unbegrenzt; die vorgelegte Reihe ist also für $\alpha > 0$ konvergent.

62. *Satz. Bedeutet α eine positive Zahl, so ist eine Reihe konvergent, sobald $n^{1+\alpha} u_n$ mit wachsendem n nicht unbegrenzt wächst; sie ist divergent, wenn $n u_n$ mit wachsendem n nicht Werte annimmt, die der Null beliebig nahe kommen.*

In der That, wenn es eine Zahl A giebt, sodafs $n^{1+\alpha} u_n$ kleiner als A ist, so wird

$$u_n < \frac{A}{n^{1+\alpha}}$$

und die Glieder der vorgelegten Reihe sind daher kleiner als die entsprechenden Glieder derjenigen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{A}{n^{1+\alpha}}$ ist. Diese ist aber konvergent und daher konvergiert auch die vorgelegte Reihe.

Giebt es dagegen eine Zahl A, sodafs für hinreichend grofse Werte von n immer nu_n gröfser als A ist, so wird $u_n > \frac{A}{n}$. Die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{A}{n}$ ist, divergiert aber und daher gilt das Gleiche von der vorgelegten Reihe.

Wird u_n unendlich klein von einer bestimmten Ordnung r, wobei $\frac{1}{n}$ als unendlich kleine Gröfse erster Ordnung genommen ist, so konvergiert die Gröfse $n^r u_n$ mit wachsendem n gegen einen bestimmten Grenzwert l, der weder 0 noch ∞ ist. Für hinreichend grofse Werte von n ist dann $n^r u_n$ zwischen zwei endlichen Gröfsen enthalten, die l beliebig nahe kommen; die Reihe ist daher dann konvergent, wenn $r > 1$, dagegen divergent, wenn $r \leqq 1$ ist.

So ist z. B. eine Reihe, deren allgemeines Glied eine rationale Funktion von n ist, konvergent, wenn der Grad des Nenners den des Zählers um wenigstens zwei Einheiten übersteigt; in jedem anderen Falle ist sie divergent.

Die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $u_n = \sin^\alpha\left(\frac{x}{a+n}\right)$ ist konvergent, wenn $\alpha > 1$, divergent, wenn $\alpha \leqq 1$ ist; dabei ist x als von 0 verschieden angenommen. Denn da

$$\lim_{n=\infty} n^\alpha \sin^\alpha \frac{x}{a+n} = x^\alpha$$

ist, so ist das allgemeine Glied unendlich klein von der Ordnung α.

Dasselbe läfst sich von der Reihe sagen, in der

$$u_n = \operatorname{tang}^\alpha \frac{x}{a+n}$$

ist.

63. Die Schlufsweise, durch welche wir die Konvergenz der Reihen der vorletzten Nummer erkannt haben, läfst sich verallgemeinern und führt dann zu folgendem:

Satz. Ist $f(x)$ für alle Werte von $x \geqq a$ eine positive unbegrenzt abnehmende Funktion und kennt man eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, so ist die Reihe

$$f(a), \quad f(a+1), \quad f(a+2), \ldots$$

konvergent oder divergent, je nachdem $F(x)$, welches ja eine positive Ableitung hat, und daher mit wachsendem x beständig wächst, nicht unbegrenzt wächst oder unbegrenzt wächst.

In der That, es ist $F(x+1) - F(x) = F'(x+\theta)$, wo $0 < \theta < 1$. Da nun $F'(x) = f(x)$ ist, so folgt

$$F(x+1) - F(x) = f(x+\theta).$$

Wenn man aber annimmt, dafs $f(x)$ beständig abnimmt, so ist $f(x) > f(x+\theta) > f(x+1)$, also wird:

$$f(x) > F(x+1) - F(x) > f(x+1).$$

Setzt man hierin der Reihe nach x gleich a, $a+1, \ldots$ $a+n-2$, $a+n-1$ und addiert die entstandenen Ungleichungen, so wird:

$$s_n > F(a+n) - F(a) > s_{n+1} - f(a).$$

Dabei ist:

$$s_n = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(a+n-1)$$

gesetzt.

Hieraus schliefst man, dafs die Reihe divergiert, wenn $F(a+n)$ mit wachsendem n unbegrenzt wächst. Besitzt dagegen $F(a+n)$ einen endlichen Grenzwert, so ist es immer kleiner als dieser und daher wird:

$$s_{n+1} < f(a) + \lim F(a+n) - F(a).$$

Da mithin s_{n+1} nicht unbegrenzt wächst, so ist die Reihe konvergent.

64. Stützt man sich auf den vorigen Satz, so kann man zeigen, dafs die Reihen:

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{3^{1+\alpha}}, \ldots$$

$$\frac{1}{2\,(\log 2)^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{3\,(\log 3)^{1+\alpha}}, \ldots$$

$$\frac{1}{3 \log 3\,(\log\log 3)^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{4 \log 4\,(\log\log 4)^{1+\alpha}}, \ldots$$

konvergent sind, wenn $\alpha > 0$, und divergent, wenn $\alpha \leqq 0$ ist.

In der That, die soeben hingeschriebenen Reihen entstehen aus den Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x(\log x)^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x \log x (\log\log x)^{1+\alpha}}, \ldots,$$

indem man x alle ganzen positiven Werte giebt, für welche die Nenner reell und positiv sind. Für diese Werte sind aber jene Funktionen von x positiv und sie nehmen unbegrenzt ab. Ist $\alpha > 0$, so werden die zugehörigen Funktionen $F(x)$, deren Ableitungen die entsprechenden Funktionen $f(x)$ sind, bezw.:

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}, \quad -\frac{1}{\alpha(\log x)^{\alpha}}, \quad -\frac{1}{\alpha(\log\log x)^{\alpha}}, \ldots .$$

Mit wachsendem x konvergieren diese aber gegen null. Daher sind für $\alpha > 1$ die vorgelegten Reihen konvergent.

Ist $\alpha = 0$, so mufs man

$$F(x) = \log x, \quad \log\log x, \quad \log\log\log x, \ldots$$

wählen. Da diese mit wachsendem x unbegrenzt wachsen, so sind für $\alpha = 0$ die vorgelegten Reihen divergent. Umsomehr sind sie also für $\alpha < 0$ divergent.

§ 4. Reihen mit Gliedern von beliebigem Vorzeichen.

65. *Satz. Eine Reihe, deren Glieder beliebige Vorzeichen haben, ist konvergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge der Glieder konvergiert.*

Es sei s_n die Summe der ersten n Glieder der Reihe, s_n' die Summe der positiven Glieder in s_n, $-s_n''$ die der negativen Glieder. Dann wird $s_n = s_n' - s_n''$. Ist nun Σ die Summe der Reihe, welche aus den absoluten Beträgen gebildet ist, so wird $\Sigma = \lim (s_n' + s_n'')$. Also bleiben s_n' und s_n'', die zwar mit wachsendem n wachsen, beständig kleiner als Σ und konvergieren daher gegen endliche Grenzwerte. Es sei $\lim s_n' = s'$ und $\lim s_n'' = s''$; dann wird auch s_n sich einem bestimmten Grenzwerte nähern $\lim s_n = s' - s''$. Die Reihe ist also konvergent.

Die Umkehr des Satzes ist nicht richtig.

66. *Satz. Eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen, deren Glieder beständig und unbegrenzt abnehmen, ist konvergent.*

Es sei

$$u_0, \quad -u_1, \quad u_2, \quad -u_3, \cdots$$

die Reihe; die u seien alle positiv und es sei $u_0 > u_1 > u_2 > \cdots$ und $\lim u_n = 0$. Man fasse eine gerade Anzahl von Gliedern der gegebenen Reihe zusammen und setze:

$$s_{2n} = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + u_{2n-2} - u_{2n-1}.$$

Diese Summe kann man sowohl in die Form:

$$s_{2n} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}),$$

als auch in die Form:

$$s_{2n} = u_0 - (u_1 - u_2) - \cdots - (u_{2n-3} - u_{2n-2}) - u_{2n-1}$$

setzen. Aus der ersten Gleichung schliefst man, dafs s_{2n} mit wachsendem n wächst und aus der zweiten, dafs $s_{2n} < u_0$ ist. Daher konvergiert s_{2n} mit wachsendem n gegen eine Grenze; es sei $\lim s_{2n} = s$.

Nimmt man jetzt eine ungerade Anzahl von Gliedern und setzt $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n}$, so folgt aus $\lim s_{2n} = s$, $\lim u_{2n} = 0$, dafs auch $\lim s_{2n+1} = s$ ist. Also konvergiert die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern gegen eine endliche Grenze, die Reihe ist konvergent.

Bricht man die Reihe beim n^{ten} Gliede ab, so wird der Rest:

$$r_n = \pm u_n \mp u_{n+1} \pm \cdots$$

oder:

$$r_n = \pm (u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \cdots).$$

Hierbei ist die Klammer positiv und kleiner als u_n. Bleibt man also bei einem beliebigen Gliede der Reihe stehen, so hat der Rest das Vorzeichen des folgenden Gliedes und ist absolut kleiner als der absolute Wert dieses Gliedes.

Beispielsweise hat die Reihe $\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots,$ deren Glieder die der harmonischen Reihe, aber mit abwechselnden Vorzeichen sind, lauter beständig gegen Null abnehmende Glieder. Sie ist daher konvergent. Bricht man hinter dem Gliede $\pm \frac{1}{n}$ ab, so ist der Fehler, der dadurch entsteht, absolut kleiner als $\frac{1}{n+1}$. Will man also die Reihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10^7}$ genau summieren, so genügt es $10^7 - 1$ Glieder zu summieren. Die Reihe konvergiert also sehr langsam.

§ 5. Taylorsche Reihe.

67. Ist $f(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $n-1$, so kennt man aus der Algebra die Formel:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0).$$

Sie drückt $f(x_0+h)$ als Funktion der Werte von $f(x)$ und seinen Ableitungen für $x=x_0$ und als Funktion von h aus. Ist aber $f(x)$ keine ganze rationale Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades, so kann die vorstehende Formel nicht genau richtig sein. Trotzdem giebt das Polynom auf der rechten Seite häufig einen angenäherten Wert für $f(x_0+h)$. Wir stellen uns die Aufgabe, den Grad dieser Annäherung abzuschätzen.

Wir setzen daher:

$$(1)\qquad f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+R,$$

wo die Gröfse R, die der *Rest* der Reihe heifst, dasjenige Glied ist, welches man zu dem Polynom rechter Hand hinzufügen mufs, um den genauen Wert von $f(x_0+h)$ zu erhalten. Es ist also:

$$R=f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0).$$

Um einen einfacheren Ausdruck für R zu erhalten, setze man $x_0+h=a$, also $h=a-x_0$; dann wird:

$$R=f(a)-f(x_0)-(a-x_0)f'(x_0)-\cdots-\frac{(a-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0).$$

Man betrachte die Funktion:

$$F(x)=f(a)-f(x)-(a-x)f'(x)-\cdots-\frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x),$$

die für $x=x_0$ den Wert von R ergiebt. Es ist $F(a)=0$, $F(x_0)=R$ und, wie man durch Differentiation findet:

$$F'(x)=-\frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x).$$

Es genügt also jetzt auf die Formeln zurückzugreifen, die die Werte einer Funktion mit denen ihrer Ableitung verknüpfen, um Ausdrücke für R zu erhalten.

Wir erinnern uns, dafs $F(a) - F(x_0) = (a - x_0) F'(x_1)$ war, wo x_1 eine Gröfse zwischen x_0 und a bedeutete. Substituieren wir hierin die Werte, die wir soeben für $F(a)$, $F(x_0)$ und $F'(x_1)$ erhalten haben und ändern das Vorzeichen, so folgt:

$$R = (a - x_0) \cdot \frac{(a - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

oder, wenn wir $x_0 + h$ für a schreiben und $x_1 = x_0 + \theta h$ setzen $(0 < \theta < 1)$:

$$R = \frac{h^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h). \tag{2}$$

Diese Form des Restes verdankt man Cauchy.

Benutzt man aber die Relation:

$$\frac{F(a) - F(x_0)}{\varphi(a) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

in der φ irgend eine Funktion bedeutet, deren Ableitung im Intervalle (a, x_0) nicht null wird, so erhält man:

$$R = \frac{\varphi(a) - \varphi(x_0)}{\varphi'(x_1)} \cdot \frac{(a - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1).$$

Setzt man $\varphi(x) = (a - x)^p$, wo $p \geqq 1$, so wird

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(x_0) = (a - x_0)^p, \quad \varphi'(x) = -p(a - x)^{p-1}.$$

Also folgt durch Substitution:

$$R = \frac{(a - x_0)^p (a - x_1)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(x_1).$$

Für $p = 1$ findet man hieraus den Cauchyschen Restausdruck wieder, für $p = n$ erhält man:

$$R = \frac{(a - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_1),$$

oder, wenn man $a = x_0 + h$, $x_1 = x_0 + \theta h$ setzt:

$$R = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h). \tag{3}$$

Diese Form des Restes verdankt man Lagrange*).

*) Ein anderer Ausdruck ergiebt sich aus der Integralrechnung; setzt man in die Formel $F(a) - F(x_0) = \int_{x_0}^{a} F'(x)\, dx$ den Wert von F ein, so kommt:

$$R = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{a} (a - x)^{n-1} f^{(n)}(x)\, dx.$$

Die Formel (1) heißt die von Taylor; (2) und (3) geben das Restglied als Funktion einer unbekannten Größe θ, von der man nur weiß, daß sie zwischen 0 und 1 liegt.

68. Läßt man jetzt n unbegrenzt wachsen, so kann es vorkommen, daß R null wird. Wenn sich dies ereignet, so ist die Reihe $f(x_0)$, $hf'(x_0)$, $\frac{h^2}{2!}f''(x_0), \ldots$ konvergent und ihre Summe ist dann $f(x_0+h)$. Daher kann man schreiben:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots$$

und erhält so $f(x_0+h)$ in eine Reihe entwickelt, fortschreitend nach aufsteigenden Potenzen von h, die die Taylorsche heißt. Damit sie gilt, ist notwendig und hinreichend, daß $\lim\limits_{n=\infty} R = 0$ wird.

Man kann sofort sagen, daß die Taylorsche Reihe auf alle diejenigen Funktionen anwendbar ist, bei denen $f^{(n)}(x)$ für alle Werte x zwischen x_0 und x_0+h absolut kleiner bleibt als eine positive, von n unabhängige Zahl A. In der That, für solche Funktionen wird $|R| < \frac{h^n}{n!}A$, wie der Lagrangesche Restausdruck zeigt; $\frac{h^n}{n!}$ wird aber null, da die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{h^n}{n!}$ ist, konvergirt. Also ist auch $\lim R = 0$. Daher sind e^x, $\sin x$, $\cos x$ Funktionen, die in eine Taylorsche Reihe entwickelbar sind; denn ihre Ableitungen wachsen nicht unbegrenzt.

Man kann die Taylorsche Reihe auch auf solche Funktionen anwenden, deren n^{te} Ableitung von der Form $u^n v$ ist, wo u und v Funktionen von x und n sind, welche für alle Werte x zwischen x_0 und x_0+h und für jedes n absolut kleiner sind als zwei feste Größen A und B; denn die Lagrangesche Form des Restes zeigt, daß dann $|R| < \frac{h^n A^n}{n!} B$ wird und auch diese Größe hat den Grenzwert null.

§ 6. Mac-Laurinsche Reihe.

Setzt man in der Taylorschen Formel $x_0 = 0$, $h = x$, so geht sie über in:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R$$

und R hat die Formen:

$$R = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x) \quad \text{oder} \quad R = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x).$$

Diese Formeln gelten, wenn $f(x)$ alle Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung in dem Intervalle $(0, x)$ besitzt.

Wenn bei unbegrenzt wachsendem n, $\lim R = 0$ wird, so entsteht eine Entwickelung von $f(x)$ nach steigenden Potenzen von x:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots,$$

welche die **Mac-Laurinsche** Reihe heifst.

Die Reihe von Mac-Laurin ist ein Spezialfall von der Taylorschen; aber die Taylorsche Reihe läfst sich auch aus der von Mac-Laurin ableiten. Setzt man nämlich $F(h) = f(x_0 + h)$, so wird $F^{(n)}(h) = f^{(n)}(x_0 + h)$, und wendet man die Reihe von Mac-Laurin auf die Funktion $F(h)$ an, so erhält man die Reihe von Taylor.

§ 7. Entwickelung von e^x in eine Reihe.

70. Die aufeinanderfolgenden Ableitungen der Funktion e^x sind der Funktion selbst gleich und daher alle endlich; für $x = 0$ reduzieren sie sich auf 1. Also liefert die Mac-Laurinsche Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

und der Rest der Reihe wird unter Benutzung der Form von Lagrange, wenn man hinter dem n^{ten} Gliede abbricht:

$$R_n = \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

Bei unbegrenzt wachsendem n wird er in der That null; denn, da die Reihe konvergiert, deren allgemeines Glied $\frac{x^n}{n!}$ ist, so ist $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ (vergl. Nr. 60). $e^{\theta x}$ ist aber zwischen 1 und e^x enthalten und daher endlich. Folglich gilt die vorstehende Reihenentwickelung für alle Werte von x.

71. Setzt man in der vorigen Formel $x = 1$, so erhält man eine numerische Reihe für den Wert von e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

und der Rest der Reihe wird, wenn man hinter dem n^{ten} Gliede abbricht:

$$R_n = \frac{e^{\theta}}{n!}.$$

Da $e < 3$ ist, so hat man $R_n < \frac{3}{n!}$. Wir können aber noch eine engere Eingrenzung für R_n finden. In der That, es ist:

$$R_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$$

oder:

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right],$$

also auch, da $n + 1$, $n + 2, \cdots$ gröſser als n sind:

$$R_n < \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots\right].$$

Summiert man die geometrische Progression auf der rechten Seite, so wird:

$$R_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n-1} \quad \text{oder} \quad R_n < \frac{1}{(n-1)!\,(n-1)}.$$

Dies besagt also, daſs der Fehler, den man macht, wenn man die Reihe beim n^{ten} Gliede abbricht, kleiner ist als der $n - 1^{\text{te}}$ Teil des zuletzt hingeschriebenen Gliedes.

Vertauscht man n mit $n + 1$ und schreibt den Wert von $R_{n+1} = \frac{\theta}{n!\,n}$, so wird:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n}, \quad \text{wo} \quad 0 < \theta < 1.$$

72. Bedient man sich dieser Formel, so kann man zeigen, daſs e inkommensurabel ist. In der That, setzt man an, es wäre etwa $e = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so wird:

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n}.$$

Multipliziert man mit $n!$ und bringt alle Glieder auf der rechten Seite mit Ausnahme des letzten auf die linke, so entsteht auf dieser Seite eine ganze Zahl, rechts aber steht $\frac{\theta}{n}$. Das ist aber unmöglich; denn θ ist eine Zahl zwischen 0 und 1 mit Ausschlufs der Grenzen, also ist auch $\frac{\theta}{n}$ gröfser als null und kleiner als 1 und keine ganze Zahl.

Setzt man in der Reihenentwickelung für e^x an Stelle von x ein $x \log a$, so wird wegen $e^{x \log a} = a^x$:

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 \log^2 a}{2!} + \cdots.$$

§ 8. Reihenentwickelung von sin x und cos x.

73. Setzt man $f(x) = \sin x$, so werden die Ableitungen der Reihe nach:

$$\cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \cdots;$$

sie wiederholen sich periodisch, es wird:

$$f^{(4n)}(x) = \sin x, \quad f^{(4n+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\sin x,$$
$$f^{(4n+3)}(x) = -\cos x.$$

Für $x = 0$ werden sie beziehungsweise:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1.$$

Wendet man daher die Taylorsche Formel mit dem Lagrangeschen Reste an, so findet man, je nach dem Gliede, bei dem man stehen bleibt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!} \sin \theta x,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \cos \theta x,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \sin \theta x,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \cos \theta x.$$

Unter welcher Form man den Rest auch betrachten mag, er wird null mit unbegrenzt wachsendem n und daher wird:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Nimmt man $0 < x < \frac{\pi}{2}$ an, so ist auch θx zwischen diesen Grenzen enthalten und $\sin \theta x$ und $\cos \theta x$ werden positiv. Hieraus schliefst man, dafs, wenn man in der Reihe für $\sin x$ mit dem Gliede x^{4n-1} aufhört, man einen positiven Rest bekommt, wenn man dagegen mit dem Gliede x^{4n+1} aufhört, einen negativen. Das Resultat ist also das eine Mal kleiner, das andere Mal gröfser als $\sin x$. Daher hat man die Ungleichungen:

$$\sin x < x, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \cdots$$
$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

74. Setzt man $f(x) = \cos x$, so findet man in ähnlicher Weise:

$$f^{(4n)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+1)}(x) = -\sin x$$
$$f^{(4n+2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4n+3)}(x) = \sin x.$$

Diese Werte reduzieren sich für $x = 0$ bezw. auf:

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0.$$

Wendet man daher die Mac-Laurinsche Formel mit dem Lagrangeschen Reste an, so findet man je nach dem Gliede, bei welchem man stehen bleibt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \sin \theta x,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \cos \theta x,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \sin \theta x,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!} \cos \theta x.$$

Unter welcher Form man auch den Rest bildet, sein Grenzwert wird null, wenn n unendlich grofs wird, also wird:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Ist $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und bricht man die Reihe hinter der Potenz x^n ab, so ist der Rest negativ oder positiv, je nachdem n durch vier geteilt den Rest 0 oder 2 läfst. Daher wird:

$$\cos x < 1, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \cdots \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 9. Binomischer Satz.

75. Es ist $(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$. Setzt man $\frac{b}{a} = x$, so wird der zweite Faktor $(1+x)^m$. Dieser ist es, den wir nach steigenden Potenzen von x entwickeln wollen.

Man setze daher $f(x) = (1+x)^m$, dann wird

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

und allgemein:

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \cdots (m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Daher giebt die Formel von Mac-Laurin:

$$(1) \qquad \begin{aligned} (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n. \end{aligned}$$

Der Rest R_n wird unter der Form von Lagrange:

$$(2) \qquad R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n(1+\theta x)^{m-n}$$

und unter der von Cauchy:

$$(3) \quad R_n = (1-\theta)^{n-1}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so wird der Rest null, wenn man $n = m+1$ setzt und man erhält den binomischen Satz für einen ganzen positiven Exponenten, den man bereits von der Algebra her kennt. Ist m keine ganze positive Zahl, so geht die Reihe, deren erste Glieder in Formel (1) hingeschrieben sind, bis ins Unendliche. In ihr wird das Verhältnis des $n+1^{\text{ten}}$ Gliedes zum n^{ten} gleich

$$\frac{m-n+1}{n}x = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right)x.$$

Mit unbegrenzt wachsendem n wird sein Grenzwert $-x$. Ist daher $|x| > 1$, so divergiert die Reihe und der Grenzwert von R_n kann nicht null sein. Ist $|x| < 1$, so ist die Reihe konvergent; überdies wird $\lim R_n = 0$, wie wir jetzt zeigen werden.

Aus der Konvergenz der Reihe für $|x| < 1$ schliefsen wir zunächst, dafs ihr allgemeines Glied den Grenzwert null hat, es ist also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} = 0,$$

welches auch der Wert von m sein mag. Vertauscht man m mit $m-1$, so wird:

$$\lim \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = 0.$$

Nunmehr kann man schreiben $R_n = ABC$, indem man setzt:

$$A = \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1},$$

$$B = mx(1+\theta x)^{m-1} \quad \text{und} \quad C = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

A hat den Grenzwert null, wie wir soeben gesehen haben, mx ist konstant und $(1+\theta x)^{m-1}$ ist zwischen den festen Grenzen 1 und $(1+x)^{m-1}$ enthalten. Also ist auch B in konstanten Grenzen eingeschlossen. Endlich ist C kleiner als 1, sobald $|x| < 1$ ist; denn in diesem Falle ist $1-\theta < 1+\theta x$. Also ist $\lim R_n = 0$, sobald $|x| < 1$.

Mithin erhält man für alle x, deren Betrag kleiner als 1 ist, die Entwickelung:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

Erteilt man m verschiedene Werte, so entstehen die Formeln:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots.$$

Diese Formeln können dazu dienen, die Wurzeln aus Zahlen zu berechnen. So ist

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}.$$

Es genügt, $\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ in eine Reihe zu entwickeln. Diese

Reihen konvergieren rasch, wenn der echte Bruch x hinreichend klein ist.

76. Es bleiben noch die Fälle $x = \pm 1$ zu studieren. Zu diesem Ende schicken wir voran, dafs der Ausdruck

$$P_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)},$$

in dem a und b konstante Zahlen bedeuten, die weder ganz und negativ, noch null sind, für $n = \infty$ unendlich grofs wird, sobald $a > b$, und null wird, wenn $a < b$. Für $a = b$ hat er beständig den Wert 1.

Nehmen wir zunächst an, es sei $a > b$ und $b > 0$; dann wird:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b},\quad \frac{a+1}{b+1} = 1 + \frac{a-b}{b+1},\quad \cdots \quad \frac{a+n-1}{b+n-1} = 1 + \frac{a-b}{b+n-1}$$

und daher:

$$P_n = \left(1 + \frac{a-b}{b}\right)\left(1 + \frac{a-b}{b+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{a-b}{b+n-1}\right).$$

Der zweite Summand einer jeden Klammer ist positiv. Führt man die Multiplikation aus, so erhält man:

$$P_n > 1 + (a-b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \cdots + \frac{1}{b+n-1}\right).$$

Aber die Glieder in der Klammer sind die ersten Glieder einer divergenten Reihe, also wird diese für $n = \infty$ selbst unendlich und Gleiches gilt daher von P_n.

Ist wiederum $a > b$, aber $b < 0$, so nehme man irgend eine ganze Zahl m, für welche $b + m > 0$ wird, und setze $a + m = a'$, $b + m = b'$. Nimmt man $n > m$ und setzt $n - m = n'$, so wird:

$$P_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)}{b(b+1)\cdots(b+m-1)} \cdot \frac{a'(a'+1)\cdots(a'+n'-1)}{b'(b'+1)\cdots(b'+n'-1)}.$$

Der erste Faktor rechter Hand ist eine endliche, von null verschiedene Gröfse; denn a und b sind nicht null oder negative ganze Zahlen. Der zweite Faktor wird mit wachsendem n, also auch n' unendlich grofs; denn es ist $a' > b'$. Also ist $\lim P_n = \infty$.

Man nehme jetzt $a < b$ an; dann wird:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$

und da $b > a$ ist, so wächst dieser Ausdruck unbegrenzt, also wird $\lim P_n = 0$.

Ist $a = b$, so wird $P_n = 1$.

77. Wir setzen nunmehr in der Binomialformel $x = +1$. Der Rest wird dann in der Lagrangeschen Form:

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}(1+\theta)^{m-n}$$

oder:

$$R_n = (-1)^n \frac{(-m)(1-m)\cdots(n-1-m)}{n!}(1+\theta)^{m-n}$$

und der Faktor $(1+\theta)^{n-m}$ ist kleiner als 1, wenn $n > m$ ist. Der Faktor $\frac{(-m)(1-m)\cdots(n-1-m)}{n!}$ entsteht aus P_n, indem man $a = -m$, $b = 1$ setzt; daher wird er null, wenn $-m < 1$ oder $m > -1$ ist. In diesem Falle wird daher auch $\lim R_n = 0$ und man erhält:

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} + \cdots$$

für jedes $m > -1$.

Setzt man $m = -1$, so entsteht die divergente Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; ist $m < -1$, so wird das allgemeine Glied der Reihe:

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \pm \frac{(-m)(1-m)(2-m)\cdots(n-1-m)}{n!}.$$

Dies wächst, absolut genommen, mit wachsendem n nach dem Gesagten über jede Grenze, also divergiert die Reihe (Nr. 55).

78. Setzt man endlich in der Binomialformel $x = -1$, so wird die Reihe: $1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} - \cdots$. Daher wird:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 - \frac{m}{1} = -\frac{m-1}{1}$$

$$s_3 = -\frac{m-1}{1} + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$$s_4 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}$$

. . . .

$$s_n = (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)}{(n-2)!} + (-1)^{n+1} . \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}$$

$$= (-1)^{n+1} . \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}.$$

Aus diesem Ausdrucke von s_n kann man leicht seinen Grenzwert für $n = \infty$ ableiten. In der That kann man schreiben:

$$s_n = \frac{(1-m)(2-m)\dots(n-1-m)}{(n-1)!}.$$

Nach dem Bewiesenen ist aber $\lim s_n = 0$, wenn $1 - m < 1$ oder $m > 0$ ist. Man hat daher:

$$0 = 1 - \frac{m}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} - \cdots, \quad m > 0.$$

Diese Formel stimmt mit der Binomialformel für $x = -1$ und für positives m überein. Ist dagegen $m < 0$, so wird s_n mit wachsendem n unendlich grofs und die Reihe divergiert. Die Binomialformel andererseits reduziert sich für $x = -1$ und negatives m auf $0^m = \infty$. Ist endlich $m = 0$, so nimmt das Binom die nichtssagende Form 0^0 an, während sich die Reihe auf ihr erstes Glied 1 reduziert.

Zusammenfassend können wir sagen, dafs der binomische Satz bei $|x| < 1$ für jedes (reelle) m gilt; ist aber $x = 1$, so gilt er für $m > -1$, ist $x = -1$, so gilt er für $m > 0$ und nur in diesen Fällen.

§ 10. Reihenentwickelung von $\log(1+x)$. Formeln zur Berechnung der Logarithmen.

79. Man setze $f(x) = \log(1+x)$; dann ist:

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \cdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n};$$

daher wird:

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1, \cdots f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Setzt man dies in die Mac-Laurinsche Formel ein, so kommt:

$$(1) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n.$$

R_n kann man die zwei Formen geben:

$$(2) \qquad R_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}$$

oder:

$$(3) \qquad R_n = (-1)^{n-1}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{-n}.$$

Die Reihe, deren erste Glieder in Formel (1) aufgeschrieben sind, ist divergent für $|x| > 1$; denn das Verhältnis zweier aufeinander folgender Glieder $\pm \frac{x^n}{n} : \mp \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\frac{n-1}{n} x$ erhält für $n = \infty$ den Grenzwert $-x$. Ist also $|x| > 1$, so kann die Reihe den Logarithmus nicht darstellen.

Ist x positiv, aber kleiner als 1, und nimmt man den Rest in der Form (2), so ist $1 + \theta x > 1$ und daher $(1 + \theta x)^{-n} < 1$. Der erste Faktor $\frac{x^n}{n}$ hat die Grenze 0; denn x^n hat die Grenze 0, und der Nenner wird unendlich grofs. Daher ist $\lim R_n = 0$ und es wird für $x > 1$:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Dieselbe Formel bleibt auch für $x = 1$ bestehen; denn in diesem Falle wird $R_n = \pm \frac{1}{n}(1 + \theta)^{-n}$. Der zweite Faktor ist wieder kleiner als 1, während der erste $\frac{1}{n}$ die Grenze null hat. Also folgt:

$$(4) \qquad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

als Summe der harmonischen Reihe mit alternierenden Vorzeichen. Sie konvergiert sehr langsam.

Ist nunmehr x negativ, aber absolut kleiner als 1, so giebt die zweite Form des Restes:

$$R_n = \pm \frac{x^n}{1 + \theta x} \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^{n-1}.$$

x^n hat den Grenzwert 0, $\frac{1}{1 + \theta x}$ ist kleiner als $\frac{1}{1 + x}$ und daher endlich; $\left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^{n-1}$ ist kleiner als 1; also wird $\lim R_n = 0$.

Macht man $x = -1$, so erhält man die Reihe:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots,$$

welche divergiert. Andererseits wird aus $\log(1 + x)$:

$$\log(1 - 1) = \log 0 = -\infty.$$

Zusammenfassend können wir sagen:

Die Formel:

(5) $$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

besteht für jedes x, dessen Betrag kleiner als 1 ist und für $x = 1$.

80. Vertauscht man in der letzten Formel x mit $-x$, so erhält man:

(6) $$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Subtrahiert man diese von der vorigen, so heben sich die geraden Potenzen von x fort, während die ungeraden Potenzen sich verdoppeln; also wird:

(7) $$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x} =$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad |x| < 1.$$

Setzt man:
$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{h}{z} = \frac{z+h}{z},$$

so wird $x = \frac{h}{2z+h}$. x ist gewifs positiv und kleiner als 1, wenn h und z positive Gröfsen sind. Substituiert man diesen Ausdruck für x in (7), so wird:

(8) $$\log(z+h) - \log z = 2\left(\frac{h}{2z+h} + \frac{h^3}{3(2z+h)^3} + \frac{h^5}{5(2z+h)^5} + \cdots\right).$$

Durch passende Wahl von z und h kann man hieraus die Logarithmen aller natürlichen Zahlen bestimmen.

Setzt man in (8) z. B. $z = 1$, $h = 1$, so findet man:

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right],$$

eine schnell konvergierende Reihe. Durch Berechnung einer hinreichenden Zahl von Gliedern findet man:

$$\log 2 = 0{,}69314\,718 \cdots.$$

Setzt man in derselben Formel $z = 4$, $h = 1$, so erhält man:

$$\log 5 = \log 4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \cdots\right].$$

Nun ist $\log 4 = 2\log 2$ bekannt und die Reihe [ ] konvergiert sehr rasch; man kann daher leicht $\log 5$ berechnen. Hat man diesen gefunden, so erhält man log 10 = log 5 + log 2 und bekommt:

$$\log 10 = 2{,}30258\,509 \cdots.$$

Diese Zahl wird uns bald nützlich sein.

Mau erkennt, dafs man auf diese Weise die Logarithmen aller Primzahlen finden kann. In der Praxis bedient man sich noch einiger Kunstgriffe, um die Konvergenz der zu berechnenden Reihen noch zu verstärken. Um beispielsweise log 7 zu finden, kann man so verfahren: Man setze in Formel (8) $z = 49 = 7^2$ und $h = 1$, dann wird $z + h = 50 = 2 \cdot 5^2$ und daher:

$$\log 2 + 2 \log 5 - 2 \log 7 = 2\left[\frac{1}{99} + \frac{1}{3 \cdot 99^3} + \frac{1}{5 \cdot 99^5} + \cdots\right].$$

Diese Reihe liefert log 7 mit Hülfe von log 2 und log 5; sie konvergiert sehr rasch.

81. Die vorstehenden Formeln dienen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen, aus ihnen kann man die Logarithmen mit beliebiger Basis ableiten.

In der That, es sei y eine gegebene Zahl, x sei ihr natürlicher Logarithmus, x' der mit der Basis a. Dann ist:

$$e^x = a^{x'} = y$$

und daher, wenn man die Logarithmen mit irgend einer Basis nimmt:

$$x \operatorname{Log} e = x' \operatorname{Log} a.$$

Also wird:

$$x' = x \frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} a} = x \cdot {}^a\operatorname{Log} e = \frac{x}{\log a}.$$

Man erhält also den Logarithmus einer beliebigen Zahl in Bezug auf die Basis a, indem man den natürlichen Logarithmus derselben Zahl mit einem konstanten Faktor multipliziert, welcher der Modul des Logarithmensystems mit der Basis a heifst. Dieser ist sowohl gleich dem Logarithmus mit der Basis a von der Zahl e, als auch der reziproke Wert des natürlichen Logarithmus von der Basiszahl a.

Der Modul der dekadischen Logarithmen ist daher

$${}^{10}\operatorname{Log} e = \frac{1}{\log 10}.$$

Bezeichnet man ihn durch M, so hat man:

$$M = \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2,302\cdots} = 0,43429\,448\cdots.$$

Statt zuerst die natürlichen Logarithmen zu berechnen, um daraus durch Multiplikation mit dem Modul des Systemes die Logarithmen in einer beliebigen Basis zu erhalten, kann man diese auch direkt aus Reihenentwickelungen ableiten, welche die Logarithmen in der gewünschten Basis geben. In der That, multipliziert man z. B. die Formel (8) mit M und beachtet, daſs $M \log x = \operatorname{Log} x$ ist, so erhält man:

$$\operatorname{Log}(z+h) - \operatorname{Log} z =$$
$$= 2M\left[\frac{h}{2z+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2z+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2z+h}\right)^5 + \cdots\right].$$

§ 11. Reihenentwickelung von arc tang x.

82. Man setze $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; dann wird:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \cdots;$$

das Bildungsgesetz der aufeinanderfolgenden Ableitungen ist kein einfaches (vergl. Nr. 49, Üb. 21).

Will man gleichwohl die Reihenentwickelung für $\operatorname{arc\,tg} x$ erhalten, so kann man, wie folgt, verfahren. Es ist:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

Setzt man daher

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n R(x),$$

so wird die Funktion $R(x)$ null für $x = 0$, wenn man für $\operatorname{arc\,tg} x$ den kleinsten Bogen nimmt, dessen Tangens x ist. Die Ableitung wird:

$$R'(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Setzt man nun in der Formel:

$$\frac{R(x) - R(0)}{\varphi(x) - \varphi(0)} = \frac{R'(\theta x)}{\varphi'(\theta x)}$$

die Funktion $\varphi(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, so wird $\varphi'(x) = x^{2n}$, $R(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ und daher:

$$R(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{(\theta x)^{2n}}{1+(\theta x)^2}\cdot\frac{1}{(\theta x)^{2n}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1+\theta^2 x^2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Nun ist aber für $|x| \leqq 1$ der Grenzwert von $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ null; $\frac{1}{1+\theta^2 x^2}$ hingegen ist immer kleiner als 1. Daher ist $\lim R(x) = 0$ und:

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Die Reihe gilt auch noch für $x = 1$ und giebt dann:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Dies ist eine Reihe zur Berechnung von π, die aber sehr langsam konvergiert.

Die obige Reihe für $\operatorname{arc\,tang} x$ ist divergent, wenn $x = -1$ und wenn $|x| > 1$ ist.

83. Durch passende Kunstgriffe kann man Reihen für π bestimmen, die sehr bequem zur Rechnung sind. Zu bemerken ist die folgende, die man Machin verdankt.

Setzt man $a = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5}$, so erhält man:

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots.$$

Wegen $\operatorname{tang} a = \frac{1}{5}$ hat man $\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} = \frac{5}{12}$ und $\operatorname{tang} 4a = \frac{120}{119}$. Also ist $\operatorname{tang} 4a > 1$ und $4a > \frac{\pi}{4}$. Setzt man $4a - \frac{\pi}{4} = A$, so wird:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} 4a - 1}{1 + \operatorname{tang} 4a} = \frac{1}{239}$$

und daher

$$A = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots.$$

Da nun $\frac{\pi}{4} = 4a - A$ ist, so hat man schließlich:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right].$$

Diese Reihen konvergieren sehr rasch.

§ 12. Interpolation.

84. Es sei $f(x)$ eine gegebene Funktion von x, und es seien $x_1, x_2, x_3, \cdots$ verschiedene Werte, welche man der Veränderlichen erteilen kann. Man nennt *interpolierende Funktionen*

erster, zweiter, dritter, $\cdots$ Ordnung die Ausdrücke $f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\cdots$, welche durch die Gleichungen definiert sind:

$$f(x_1, x_2) \qquad = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) \quad = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3)}{x_2 - x_3},$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_4)}{x_3 - x_4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die interpolierende Funktion n^{ter} Ordnung hängt von $n+1$ Veränderlichen ab.

Man kann schreiben:

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

und daher auch:

$$f(x_1, x_3) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_3} + \frac{f(x_3)}{x_3 - x_1}.$$

Subtrahiert man und beachtet, daſs

$$\frac{1}{x_1 - x_2} - \frac{1}{x_1 - x_3} = \frac{x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

ist, so erhält man:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3) = \frac{f(x_1) \cdot (x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3)}{x_3 - x_1}.$$

Dividiert man durch $x_2 - x_3$, so entsteht:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

und ähnlich kann man die interpolierende Funktion $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung unter die Form bringen:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)} +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Diese Formel ist bereits für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ erwiesen. Nimmt man an, daſs sie für einen bestimmten Wert von n gilt, so kann man hieraus leicht auch auf ihre Richtigkeit für $n + 1$ schlieſsen; damit hat man dann ihre Allgemeingültigkeit dargethan.

Aus der letzten Formel folgert man, dafs eine interpolierende Funktion eine symmetrische Funktion der Veränderlichen ist, von denen sie abhängt.

85. Man lernt in der Algebra eine ganze rationale Funktion $F(x)$ vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade bilden, welche für n gegebene Werte $x_1, x_2, \cdots x_n$ auch n gegebene Werte annimmt, nämlich diejenigen Werte $f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n)$, welche irgend eine andere Funktion $f(x)$ an diesen Stellen hat. Dieses Polynom läfst sich durch die interpolierenden Funktionen ausdrücken. In der That, ist $F(x_1) = f(x_1)$, so wird die Funktion $F(x) - f(x_1)$, da sie für $x = x_1$ verschwindet, teilbar durch $x - x_1$. Setzt man daher $F_1(x) = \frac{F(x) - f(x_1)}{x - x_1}$, so wird $F_1(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $n - 2$. Setzt man in ihr $x = x_2, x_3, \cdots x_n$, so wird $F(x_2) = f(x_2), \cdots F(x_n) = f(x_n)$ und daher nimmt an diesen Stellen $F_1(x)$ die Werte an:

$$F_1(x_2) = f(x_1, x_2), \quad F_1(x_3) = f(x_1, x_3), \quad \cdots \quad F_1(x_n) = f(x_1, x_n).$$

Überdies folgt aus der Gleichung, welche $F_1(x)$ definiert:

(1) $$F(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot F_1(x).$$

Auf das Polynom $n - 2^{\text{ten}}$ Grades $F_1(x)$, dessen Werte man für $n - 1$ Werte der Veränderlichen kennt, kann man dieselben Schlüsse anwenden, wie vorher auf $F(x)$. Setzt man daher:

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - f(x_1, x_2)}{x - x_2},$$

so wird $F_2(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $n - 3$, welche für $x = x_3, x_4, \cdots x_n$ beziehentlich die Werte $f(x_1, x_2, x_3), \cdots f(x_1, x_2, x_n)$ annimmt und man erhält:

(2) $$F_1(x) = f(x_1, x_2) + (x - x_2) F_2(x).$$

Fährt man so fort, so erhält man eine neue Gleichung:

(3) $$F_2(x) = f(x_1, x_2, x_3) + (x - x_3) F_3(x)$$

. . . .

Schliefslich bekommen wir eine Funktion $F_{n-2}(x)$ ersten Grades, welche für $x = x_{n-1}$ und x_n die Werte annimmt

$$f(x_1, x_2, \cdots x_{n-2}, x_{n-1}) \text{ und } f(x_1, x_2, \cdots x_{n-2}, x_n).$$

Daher können wir setzen:

$$F_{n-2}(x) = f(x_1, x_2, \cdots x_{n-2}, x_{n-1}) + (x - x_{n-1}) F_{n-1}(x),$$

wo $F_{n-1}(x)$ eine Konstante ist, deren Wert sich aus der letzten Gleichung ergiebt, wenn man in ihr $x = x_n$ setzt; es wird

$$F_{n-1}(x) = f(x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n).$$

Setzt man jetzt in die Formel (1) für $F_1(x)$ seinen Wert aus (2), für $F_2(x)$ seinen Wert aus (3) u. s. w., so findet man

$$F(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

Auf diese Weise hat man durch die interpolierenden Funktionen diejenige ganze rationale Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades von x ausgedrückt, welche an den Stellen $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Werte $f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n)$ annimmt. Die vorstehende Formel heifst die Newtonsche Interpolationsformel. Da man nur ein einziges Polynom $n - 1^{\text{ten}}$ Grades bilden kann, welches an n verschiedenen Stellen n gegebene Werte annimmt, so kann sich diese Formel von der Lagrangeschen Interpolationsformel nicht unterscheiden.

86. Nach einer Formel der Differentialrechnung hat man:

$$f(x_1, x_2) = f'(u),$$

wo u ein Wert zwischen x_1 und x_2 ist. Dabei ist vorausgesetzt, dafs $f(x)$ für alle Werte x in dem Intervalle x_1, x_2 eine bestimmte endliche Ableitung besitzt. Eine ähnliche Formel besteht für die interpolierenden Funktionen von beliebig hoher Ordnung.

Man nehme an, dafs für alle Werte x eines bestimmten Intervalles $f(x)$ nebst seinen Ableitungen bis zur $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmte endliche Werte besitzt. $x_1, x_2, \cdots x_n$ seien Werte in jenem Intervalle und man betrachte die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - F(x),$$

wo $F(x)$ die frühere Bedeutung hat. Dann besitzt $\varphi(x)$ ebenfalls alle Ableitungen bis zur $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese Funktion verschwindet für $x = x_1, x_2, \cdots x_n$; daher verschwindet ihre Ableitung $\varphi'(x)$ nach einem bekannten Satze für einen Wert x zwischen x_1 und x_2, für einen andern Wert zwischen x_2 und x_3, u. s. w. Zur Fixierung der Ideen ist dabei angenommen, dafs $x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n$ ist; in jedem Falle aber verschwindet $\varphi'(x)$ mindestens $n - 1$mal in dem Intervalle, das von dem kleinsten und gröfsten der Werte $x_1, x_2 \cdots x_n$ begrenzt ist. Aus demselben Grunde verschwindet $\varphi''(x)$ für $n - 2$ Werte in jenem Intervalle; schliefslich verschwindet die Ableitung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung für einen bestimmten Wert u des Intervalles. Es ist aber:

$$\varphi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - F^{(n-1)}(x).$$

Durch Differentiation von $F(x)$ folgt aber:

$$F^{(n-1)}(x) = (n - 1)!\, f(x_1, x_2 \cdots x_n).$$

Also ist:

$$\varphi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - (n - 1)!\, f(x_1, x_2 \cdots x_n).$$

Setzt man $x = u$, so erhält man:

$$\varphi^{(n-1)}(u) = f^{(n-1)}(u) - (n - 1)!\, f(x_1, x_2 \cdots x_n) = 0.$$

Also wird:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \frac{f^{(n-1)}(u)}{(n-1)!}.$$

Diese Formel drückt die interpolierende Funktion der Ordnung $n - 1$ durch die Ableitung derselben Ordnung aus; das Argument dieser Ableitung ist dabei ein Mittelwert der Veränderlichen, welcher zwischen den gegebenen Werten von x liegt.

Ist die $n - 1^{\text{te}}$ Ableitung stetig, so lasse man $x_1, x_2 \cdots x_n$ gegen den nämlichen Wert x_0 konvergieren, alsdann konvergiert auch u gegen x_0 und es wird:

$$\lim f^{(n-1)}(u) = f^{(n-1)}(x_0)$$

oder:

$$\lim f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}.$$

87. Die Funktion $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ stellt den Fehler dar, den man begeht, wenn man an Stelle der Funktion $f(x)$ das Polynom $F(x)$ setzt; sie läfst sich durch die interpolierenden Funktionen ausdrücken. In der That, das Polynom n^{ten} Grades, welches für die $n + 1$ Werte $x_1, x_2 \cdots x_n, x_0$ dieselben Werte $f(x)$ annimmt, ist

$$f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + \cdots + (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2 \cdots x_n) + \\ + (x - x_1) \cdots (x - x_n) f(x_1, x_2 \cdots x_n, x_0).$$

Setzt man hierin $x = x_0$, so wird sein Wert $f(x_0)$. Vertauscht man sodann x_0 mit x, so erhält man:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + \\ \cdots + (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2 \cdots x_n) + \\ + (x - x_1) \cdots (x - x_n) f(x_1, x_2 \cdots x_n, x);$$

daher wird:

$$\varphi(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) f(x_1, x_2 \cdots x_n, x)$$

oder auch:

$$\varphi(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n)}(u)}{n!},$$

wo u ein Mittelwert zwischen $x_1, x_2 \cdots x_n, x$ ist.

Setzt man daher in $f(x) = F(x) + \varphi(x)$ für $F(x)$ und $\varphi(x)$ ihre Werte, so erhält man:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \\ \cdots + (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2 \cdots x_n) + \\ + (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n)}(u)}{n!}.$$

Diese Formel zeigt viele Analogie mit der durch den Lagrangeschen Restausdruck vervollständigten Taylorschen Formel.

§ 13. Anwendungen der Interpolationsformeln.

88. Sind die Werte einer Funktion $f(x)$ berechnet, welche zwei sehr aneinander liegenden Werten x_1, x_2 entsprechen, so bestimmt man manchmal den Funktionswert, der einem Werte x zwischen x_1 und x_2 entspricht, indem man annimmt, daſs die Zuwüchse der Funktion den Zuwüchsen der Veränderlichen proportional sind; man stellt also die Proportion auf

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

und schlieſst aus ihr:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

oder:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2).$$

Diese Annahme ist im allgemeinen nicht streng; denn wäre sie richtig, so würde $f(x)$ eine Funktion ersten Grades von x.

Indem man daher für $f(x)$ den Wert nimmt, der durch die fragliche Formel gegeben wird, begeht man einen Fehler, den wir abschätzen wollen.

Nimmt man die Newtonsche Interpolationsformel mit dem Restgliede, so hat man:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1, x_2) + (x - x_1)\,(x - x_2)\, f(x_1\, x_2\, x)$$

oder:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\, f(x_1, x_2) + (x - x_1)\,(x - x_2)\, \frac{f''(u)}{2},$$

wo u ein Mittelwert zwischen x_1 und x_2 ist. Der Fehler wird durch das dritte Glied der rechten Seite dargestellt.

Wir wollen dieses Resultat auf die Interpolation der dekadischen Logarithmen anwenden. Es seien die Logarithmen der Basis 10 von allen ganzen Zahlen zwischen 1000 und 10000 berechnet und tabuliert; dann kann man die Aufsuchung des Logarithmus einer beliebigen Zahl immer zurückführen auf die Aufsuchung des Logarithmus einer Zahl x zwischen denselben Grenzen. Es sei x zwischen den ganzen Zahlen N und $N + 1$ enthalten; man bestimme $\operatorname{Log} x$, indem man die Interpolationstafeln anwendet, welche ebeben unter der Voraussetzung berechnet sind, daſs die Zuwüchse der Funktion denen der Veränderlichen proportional sind. Man begeht dadurch einen Fehler, welchen man aus der Formel erhält:

$$\varepsilon = (x - x_1)\,(x - x_2)\, \frac{f''(u)}{2!},$$

indem man in ihr $x_1 = N$, $x_2 = N + 1$, $f(x) = \operatorname{Log} x = M \log x$, $f'(x) = \frac{M}{x}$, $f''(x) = -\frac{M}{x^2}$ setzt.

Substituiert man noch $x = N + h$, wo $0 < h < 1$ ist, so wird:

$$\varepsilon = h\,(1 - h)\, \frac{M}{2u^2}.$$

Nun ist das Produkt $h\,(1 - h)$ als Produkt von zwei positiven Gröſsen, deren Summe 1 ist, ein Maximum, wenn beide Faktoren einander gleich sind, also für $h = \frac{1}{2}$. Folglich ist $h\,(1 - h) < \frac{1}{4}$, $M = \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2,3\cdots} < \frac{1}{2}$, $u > 1000$, also $\frac{1}{u^2} < \frac{1}{1000000}$. Hieraus folgt, daſs:

$$\varepsilon < \frac{1}{16 \cdot 1\,000\,000} < \frac{1}{10\,000\,000}$$

ist. Der Fehler, den man bei Anwendung der Interpolationstafeln begeht, ist also immer positiv und kleiner als eine Einheit der siebenten Dezimale.

89. In ähnlicher Weise kann man den Fehler abschätzen, den man bei Benutzung der regula falsi begeht, wenn man die Wurzeln der numerischen Gleichungen, mögen diese algebraisch oder transcedent sein, näherungsweise berechnet.

Es sei $f(x) = 0$ die vorgelegte Gleichung und es sei $f(x)$ eine stetige Funktion mit bestimmten endlichen Ableitungen. Es seien a und b zwei sehr nahe aneinander liegende Werte und so beschaffen, daſs $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben; dann liegt zwischen a und b eine Wurzel der Gleichung. Die regula falsi lehrt eine Gröſse y so zu bestimmen, daſs:

$$\frac{y-a}{y-b} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

wird. Dann ist $y = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$ ein Näherungswert der gesuchten Wurzel.

Um den Grad dieser Annäherung zu erkennen, benutze man die Formel:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f(a,b) + (x-a)\,(x-b)\,f(a,b,x).$$

Nimmt man nun an, daſs x die zwischen a und b enthaltene Wurzel der Gleichung ist, so wird $f(x) = 0$, also:

$$0 = f(a) + (x-a)\,f(a,b) + (x-a)\,(x-b)\,f(a,b,x).$$

Hieraus schlieſst man, daſs:

$$x - a = -\frac{f(a) + (x-a)\,(x-b)\,f(a,b,x)}{f(a,b)}$$

oder:

$$x = a - \frac{f(a)}{f(a,b)} - (x-a)\,(x-b)\,\frac{f(a,b,x)}{f(a,b)}$$

ist. Aber man hat:

$$a - \frac{f(a)}{f(a,b)} = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} = y$$

oder:

$$x = y - (x-a)\,(x-b)\,\frac{f(a,b,x)}{f(a,b)}.$$

Also ist der Fehler ε, den man bei Anwendung der regula falsi begeht, gegeben durch den Ausdruck:

$$\varepsilon = -(x-a)(x-b)\frac{f(a,b,x)}{f(a,b)}.$$

Dieser Fehler ist durch die Unbekannte x ausgedrückt und daher unbekannt. Beachtet man jedoch, daſs x zwischen a und b enthalten ist, so erhält man:

$$|(x-a)(x-b)| < \frac{(a-b)^2}{4} \quad \text{und} \quad f(a,b,x) = \frac{f''(u)}{2},$$

wo u ebenfalls zwischen a und b enthalten ist. Heiſst also M der gröſste Wert, den $|f''(u)|$ annimmt, wenn u zwischen a und b variiert, so wird $|f(a,b,x)| < \frac{M}{2}$ und daher ist:

$$|\varepsilon| < \frac{(a-b)^3}{8}\,\frac{M}{f(a)-f(b)}.$$

90. Die Differentialrechnung gestattet auch den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn man die Newtonsche Regel benutzt, um die Wurzeln einer Gleichung näherungsweise zu berechnen. Es sei a ein Näherungswert für eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ und $a+h$ ihr wahrer Wert, dann wird:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h) = 0,$$

also:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2}\,\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}.$$

Die Newtonsche Formel nimmt als Näherungswert für h das erste Glied $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ und begeht hierdurch einen Fehler, der durch das zweite Glied dargestellt wird. Er ist unbekannt, aber man kann eine Gröſse bestimmen, die er nicht überschreitet, sobald man von h weiſs, daſs es eine bestimmte Gröſse nicht überschreitet.

§ 14. Unendliche Produkte.

91. Gegeben sei eine unendliche Reihe von Gröſsen,

$$u_0,\; u_1,\; u_2,\; \cdots,$$

die nach einem bestimmten Gesetz gebildet sind, und man betrachte das Produkt:

$$P_n = u_0 u_1 u_2 \cdots u_{n-1}$$

der n ersten unter ihnen. Konvergiert nun P_n mit unbegrenzt wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert P, so nennt man das unendliche Produkt $u_0 u_1 u_2 \cdots$ konvergent und sagt, daſs es den Wert P hat.

Man beweist durch ähnliche Überlegungen wie die sind, welche wir bei den Reihen angestellt haben, die Sätze:

Satz. Um über die Konvergenz eines unendlichen Produktes zu entscheiden, kann man von einer endlichen Anzahl von nicht verschwindenden Faktoren zu Anfang des Produktes absehen.

Satz. Konvergiert das unendliche Produkt $u_0 u_1 \cdots$ gegen einen endlichen von null verschiedenen Grenzwert, so ist $\lim_{n=\infty} u_n = 1$.

Aus diesem Grunde bringt man das allgemeine Glied u_n auf die Form $u_n = 1 + \alpha_n$; dann wird das unendliche Produkt:

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots .$$

Konvergiert dieses gegen einen von null verschiedenen Grenzwert, so ist $\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0$.

Die Prüfung der Konvergenz eines Produktes reduziert sich auf die Prüfung der Konvergenz einer Reihe mit Hülfe des folgenden Satzes:

92. *Satz. Das unendliche Produkt*

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n) \cdots$$

konvergiert gegen einen von null verschiedenen Grenzwert, wenn die Reihen:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$$

und

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots$$

konvergieren.

In der That, konvergiert die Reihe der α, so ist $\lim \alpha_n = 0$ und $\lim (1 + \alpha_n) = 1$. Daher sind von einer bestimmten Stelle an alle Faktoren des Produktes positiv. Wir können annehmen, daſs dies schon vom ersten Faktor an der Fall ist; denn wir dürfen von einer endlichen Anzahl negativer Faktoren absehen.

Setzt man:

$$P_n = (1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_{n-1})$$

und nimmt beiderseits die Logarithmen, so wird:

$$\log P_n = \log (1 + \alpha_0) + \log (1 + \alpha_1) + \cdots + \log (1 + \alpha_{n-1}).$$

Die Mac-Laurinsche Formel

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha f'(0) + \frac{\alpha^2}{2} f''(\theta\alpha)$$

ergiebt für

$$f(\alpha) = \log(1+\alpha), \quad f'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}, \quad f''(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

die Gleichung:

$$\log(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{1+(\theta\alpha)^2}.$$

Setzt man hierin $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ und sind $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_{n-1}$ die zugehörigen Werte von θ, so ergiebt sich durch Addition der entstehenden n Gleichungen:

$$\log P_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{1+(\theta_0\alpha_0)^2} + \frac{\alpha_1^2}{1+(\theta_1\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}^2}{1+(\theta_{n-1}\alpha_{n-1})^2}\right).$$

Die Gröfsen $1+(\theta_0\alpha_0)^2$, $1+(\theta_1\alpha_1)^2, \cdots 1+(\theta_n\alpha_n)^2, \cdots$ sind positiv und ihr Grenzwert ist 1. Also giebt es eine positive Zahl m, die sie übersteigen und es wird:

$$1+(\theta_0\alpha_0)^2 > m, \quad 1+(\theta_1\alpha_1)^2 > m, \cdots$$

und:

$$\frac{\alpha_0^2}{1+(\theta_0\alpha_0)^2} < \frac{\alpha_0^2}{m}, \quad \frac{\alpha_1^2}{1+(\theta_1\alpha_1)^2} < \frac{\alpha_1^2}{m}, \cdots.$$

Mithin sind die Glieder der Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{\alpha_n^2}{1+(\theta_n\alpha_n)^2}$ ist, kleiner als die entsprechenden Glieder derjenigen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{\alpha_n^2}{m}$ ist. Da diese aber konvergiert, so konvergiert auch jene Reihe.

Mithin konvergiert $\log P_n$ gegen einen endlichen von null verschiedenen Grenzwert:

$$\lim \log P_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \cdots) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{1+(\theta_0\alpha_0)^2} + \frac{\alpha_1^2}{1+(\theta_1\alpha_1)^2} + \cdots\right).$$

Da aber $P_n = e^{\log P_n}$ ist, so konvergiert auch P_n gegen einen Grenzwert:

$$\lim P_n = e^{\lim \log P_n},$$

der bestimmt, endlich und von null verschieden ist.

93. **Korollar I.** *Ist die Reihe* $\alpha_0, \alpha_1 \cdots$ *konvergent, hingegen die Reihe* $\alpha_0^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \cdots$ *divergent, so ist* $\lim_{n=\infty} P = 0$.

In der That, die Gröfse $1 + (\theta_n \alpha_n)^2$ ist endlich, welches auch der Wert von n sein mag, und ihr Grenzwert ist 1. Also giebt es eine positive Gröfse M, für welche $1 + (\theta_n \alpha_n)^2 < M$ wird bei jedem Werte von n. Die Reihe:

$$\frac{\alpha_0^2}{1 + (\theta_0 \alpha_0)^2}, \quad \frac{\alpha_1^2}{1 + (\theta_1 \alpha_1)^2}, \cdots$$

hat lauter positive Glieder, die gröfser sind als die entsprechenden der Reihe:

$$\frac{\alpha_0^2}{M}, \quad \frac{\alpha_1^2}{M}, \cdots.$$

Da diese aber nach Voraussetzung divergiert, so thut dies auch die erste Reihe. Daher besteht $\log P_n$ aus zwei Teilen: der erste konvergiert mit unbegrenzt wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert, der zweite gegen $-\infty$; also wird $\lim \log P_n = -\infty$ und daher $\lim P_n = 0$.

Korollar II. *Die unendlichen Produkte:*

$$(1 + \alpha_0)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots$$

und

$$(1 - \alpha_0)(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots,$$

in welchen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ *positive Zahlen sind, konvergieren gegen einen endlichen, von null verschiedenen Grenzwert, wenn die Reihe*

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$$

konvergiert.

In der That, die erste Bedingung unseres Satzes ist von selbst erfüllt, die zweite aber folgt aus ihr, da die Glieder der Reihe

$$\alpha_0^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \cdots$$

von einer bestimmten Stelle an (nämlich, wenn $\alpha_n < 1$ wird) kleiner sind als die entsprechenden Glieder der ersten Reihe.

Um noch eine Anwendung von unserem Hauptsatze zu geben, so konvergiert beispielsweise das unendliche Produkt:

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \cdots,$$

sobald $|x| < 1$ ist, da dann die Reihen:

$$x, x^2, x^3 \cdots \quad \text{und} \quad x^2, x^4, x^6 \cdots$$

konvergieren.

Das unendliche Produkt:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$

hat den Grenzwert null, da die Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1}},\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad -\frac{1}{\sqrt{4}},\cdots$$

zwar konvergiert, die Reihe ihrer Quadrate aber die harmonische Reihe ist und daher divergiert.

§ 15. **Reihen mit veränderlichen Gliedern.**

94. Die Glieder einer Reihe:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots$$

können Funktionen einer Veränderlichen x sein. Ist die Reihe für ein gewisses System von Werten konvergent, so ist ihre Summe für jene Werte eine bestimmte Funktion von x. Es sei x einer dieser Werte; alsdann kann man zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε eine Zahl N bestimmen, sodafs für jeden Wert von $n > N$ der Rest der Reihe r_n, von $n+1^{\text{ten}}$ Gliede angenommen, absolut kleiner als ε wird. Diese Zahl N wird jedoch von dem besonderen Werte abhängen, den man x erteilt hat.

Wir sagen, dafs eine Reihe, deren Glieder Funktionen von x sind, und die in einem bestimmten, endlichen oder unendlichen Intervalle konvergiert, in diesem Intervalle *gleichmäfsig* konvergiert, wenn man zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε einen positiven Wert N bestimmen kann, sodafs für jeden Wert von $n \geqq N$ und für jedes x in dem betreffenden Intervalle $|r_n| < \varepsilon$ wird.

Die bekannten Konvergenzkriterien reichen häufig aus, um die gleichmäfsige Konvergenz einer Reihe zu erkennen. So schliefst man aus den Nrn. 57 und 65:

Satz. Eine Reihe mit veränderlichen Gliedern konvergiert gleichmäfsig in einem gegebenen Intervalle, wenn die Glieder der Reihe immer absolut kleiner sind, als die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe.

In der That, sind die Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2, \cdots$ für jeden Wert von x in dem gegebenen Intervalle absolut kleiner als die entsprechenden Glieder der konvergenten Reihe $a_1, a_2 \cdots$, so ist die vorgelegte Reihe konvergent, und, nennt man r_n und ϱ_n die Reste der beiden Reihen, vom $n+1^{\text{ten}}$ Gliede an gerechnet, so wird $|r_n| < \varrho_n$. Da aber die zweite Reihe konvergiert, so kann man zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε eine Zahl N bestimmen, sodafs für $n \geqq N$ auch $\varrho_n < \varepsilon$ wird; daher ist um so mehr $|r_n| < \varepsilon$, w. z. bew. w.

So ist z. B. die Exponentialreihe:

$$1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \cdots$$

in jedem endlichen Intervalle gleichmäfsig konvergent; denn ist a gröfser als alle Werte $|x|$ in dem Intervalle, so sind die Glieder der vorstehenden Reihe absolut kleiner, als die Gröfsen:

$$1, \quad \frac{a}{1!}, \quad \frac{a^2}{2!}, \cdots,$$

welche eine konvergente Reihe bilden.

Sind $a_0\ a_1\ a_2 \cdots$ irgend welche Gröfsen und $b_0\ b_1\ b_2 \cdots$ positive Gröfsen, die eine konvergente Reihe bilden, so ist die Reihe:

$$b_0 \sin a_0 x, \quad b_1 \sin a_1 x, \quad b_2 \sin a_2 x, \cdots$$

in jedem Intervalle gleichmäfsig konvergent; denn ihre Glieder sind absolut nicht gröfser als die entsprechenden Glieder der Reihe der b.

Unter den nicht gleichmäfsig konvergenten Reihen kann man wiederum die Exponentialreihe anführen, wenn man sie in dem Intervalle $(-\infty, +\infty)$ betrachtet. Denn ist $x > 0$, so ist der Rest $r_n > \frac{x^n}{n!}$ und er nimmt daher, welchen Wert man auch für n fixieren möge, mit wachsendem x beliebig grofse Werte an, und übersteigt mithin schliefslich jede gegebene Zahl ε.

Ferner betrachte man die Reihe:

$$\frac{x^2}{1(1+x^2)}, \quad \frac{x^2}{(1+x^2)(1+2x^2)}, \cdots, \quad u_n = \frac{x^2}{(1+nx^2)[1+(n+1)x^2]}.$$

In ihr ist:

$$u_n = \frac{1}{1+nx^2} - \frac{1}{1+(n+1)x^2},$$

daher wird:

$$u_0 = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$u_1 = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{1+(n-1)x^2} - \frac{1}{1+nx^2}.$$

Durch Addition folgt:

$$s_n = 1 - \frac{1}{1+nx^2}.$$

Läfst man n unendlich werden, so wird für $x \neq 0$, $\lim \frac{1}{1+nx^2} = 0$ und $\lim s_n = 1$; ist dagegen $x = 0$, so wird $s_n = 0$ und $\lim s_n = 0$ Also konvergiert die vorstehende Reihe für jeden Wert von x, und ihre Summe ist eine Funktion von x, die für $x \neq 0$ den Wert 1 und für $x = 0$ den Wert 0 hat.

Ist $x \neq 0$, so wird $r_n = \frac{1}{1+nx^2}$; für $x = 0$ wird $r_n = 0$.

Fixiert man eine beliebig kleine positive Zahl $\varepsilon < 1$, so mufs für $x \neq 0$, $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2}$ sein, damit $r_n < \varepsilon$ wird; für $x = 0$ ist n überhaupt an keine Bedingung gebunden, sondern es wird für jedes n, $r_n = 0 < \varepsilon$. Läfst man jetzt x in einem Intervalle variieren, sodafs seine Werte sich nicht unbegrenzt der Null nähern, sondern dafs eine positive Gröfse a existiert, unter die $|x|$ nicht herabsinkt, so wird $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2} < \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}$; macht man daher $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}$, so wird auch $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2}$, und $r_n < \varepsilon$. Also konvergiert die vorstehende Reihe gleichmäfsig in jedem Intervalle, das den Wert null weder in seinem Innern noch an seinen Enden enthält. Giebt man dagegen x Werte, die der Null beliebig nahe kommen können, so ist die Reihe nicht mehr gleichmäfsig konvergent, da $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x^2}$ mit verschwindendem x unendlich grofs wird und daher kein n existiert, welches der Bruch nicht überschritte.

95. *Satz. Wenn die Glieder einer Reihe solche Funktionen von x sind, die für $x = x_0$* (oder ∞) *bestimmte Grenzwerte haben und wenn die Reihe für die gerade betrachteten, die Stelle x_0* (oder ∞) *enthaltenden Werte von x gleichmäfsig*

konvergiert, so ist der Grenzwert der Summe der Reihe gleich der Summe der Grenzwerte der einzelnen Glieder.

Es sei:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots$$

die vorgelegte Reihe; s_n sei die Summe der ersten n Glieder, s die Summe der Reihe und r_n der Rest der Reihe, vom $n+1^{\text{ten}}$ Gliede an gerechnet; die Glieder der Reihe, s_n, s und r_n sind Funktionen von x. Es seien

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$$

die Grenzwerte, welche die Glieder der Reihe annehmen, wenn x gegen x_0 (oder ∞) konvergiert und σ_n sei die Summe $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

Wir werden zunächst zeigen, dafs die Reihe der a konvergiert und sodann, dafs ihre Summe der Grenzwert der Summe der gegebenen Reihe ist.

Zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε kann man eine Zahl N bestimmen, sodafs für $n > N$, $|r_n| < \varepsilon$ wird; denn die gegebene Reihe konvergiert ja gleichmäfsig. Ist $p > 0$, so wird auch $|r_{n+p}| < \varepsilon$ und daher auch $|r_{n+p} - r_n| < 2\varepsilon$; d. h.

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < 2\varepsilon.$$

Läfst man jetzt x gegen x_0 (oder ∞) konvergieren, so erhält die linke Seite, da sie immer kleiner als 2ε bleibt, einen bestimmten endlichen Grenzwert

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}|,$$

welcher 2ε nicht übersteigen kann; daher wird:

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}| \leqq 2\varepsilon,$$

d. h. zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl 2ε kann man eine Zahl N bestimmen, sodafs für jeden Wert von $n > N$ und für jeden positiven Wert von p

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}| \leqq 2\varepsilon$$

wird. Daher ist (Nr. 56) die Reihe $a_0, a_1, a_2, \cdots$ konvergent und ihre Summe, die wir σ nennen, ist zwischen $\sigma_n + 2\varepsilon$ und $\sigma_n - 2\varepsilon$ enthalten.

Man fixiere jetzt eine beliebig kleine positive Zahl α und setze $\alpha = 3\varepsilon + \varepsilon'$, wo ε und ε' ebenfalls positive Zahlen sind. Man bestimme ferner N so, dafs für $n > N$, $|r_n| < \varepsilon$, also auch $|s - s_n| < \varepsilon$ wird; endlich bestimme man eine positive Zahl h, sodafs für $|x - x_0| < h$ (oder für $x > h$), $|s_n - \sigma_n| < \varepsilon'$ wird; dies ist immer möglich, da $\lim s_n = \sigma_n$ ist. Nach dem vorher Bewiesenen ist auch $|\sigma_n - \sigma| < 2\varepsilon$ und daher $|s - \sigma| < 3\varepsilon + \varepsilon'$ oder $|s - \sigma| < \alpha$. Man kann also zu einem willkürlich fixierten positiven α eine positive Zahl h bestimmen, sodafs für jeden Wert von x, der sich von x_0 um weniger als h unterscheidet (oder für jedes $x > h$) die Differenz $|s - \sigma| < \alpha$ wird; also erhält s den Grenzwert σ, wenn x gegen x_0 (oder ∞) konvergiert, w. z. bew. w.

Korollar. *Wenn die Glieder einer Reihe in einem gegebenen Intervalle stetige Funktionen von x sind, und wenn die Reihe in demselben Intervalle gleichmäfsig konvergiert, so ist auch die Summe der Reihe eine stetige Funktion von x.*

96. *Satz. Sind die Glieder einer konvergenten Reihe $\mathfrak{R}$ differentiierbare Funktionen von x und konvergiert die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildete Reihe $\mathfrak{R}'$ gleichmäfsig, so ist die Summe der gegebenen Reihe $\mathfrak{R}$ ebenfalls eine differentiierbare Funktion von x und ihre Ableitung ist gleich der Summe der Reihe $\mathfrak{R}'$.*

Es sei:

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots$$

die gegebene Reihe $\mathfrak{R}$ und $F(x)$ ihre Summe, dann ist:

$$F(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots.$$

Erteilt man x erst einen Wert x_0, sodann einen Wert $x_0 + h$ und bildet dann die Differenz der zugehörigen Werte von $F(x)$, so erhält man nach Division mit h:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{f_0(x_0+h) - f_0(x_0)}{h} + \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} + \\ + \frac{f_2(x_0+h) - f_2(x_0)}{h} + \cdots.$$

Man nenne R_n den Rest dieser Reihe vom $n + 1^{\text{ten}}$ Gliede an.

Es sei:

$$f_0'(x),\ f_1'(x),\ f_2'(x),\ \cdots$$

die Reihe $\mathfrak{R}'$ aus den Ableitungen der einzelnen Glieder, die wir als gleichmäfsig konvergent voraussetzen, und es sei $r_n(x)$ ihr Rest vom $n + 1^{\text{ten}}$ Gliede an. Man bestimme zu einem willkürlich fixierten ε ein N, sodafs für $n \geqq N$, $|r_n| < \varepsilon$ wird.

Alsdann hat man:

$$R_{n+p} - R_n = \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} + \frac{f_{n+1}(x_0+h) - f_{n+1}(x_0)}{h} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f_{n+p-1}(x_0+h) - f_{n+p-1}(x_0)}{h}.$$

Setzt man $\varphi(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p-1}(x)$, so hat man:

$$R_{n+p} - R_n = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(x_0 + \theta h)$$

oder

$$R_{n+p} - R_n = f_n'(x_0 + \theta h) + f_{n+1}'(x_0 + \theta h) + \cdots + f_{n+p-1}'(x_0 + \theta h).$$

Das Glied auf der rechten Seite ist gleich:

$$r_{n+p}(x_0 + \theta h) - r_n(x_0 + \theta h).$$

Daraus folgt:

$$R_{n+p} - R_n = r_{n+p}(x_0 + \theta h) - r_n(x_0 + \theta h)$$

oder

$$R_n = r_n(x_0 + \theta h) + R_{n+p} - r_{n+p}(x_0 + \theta h).$$

Man lasse jetzt p unendlich werden; dann bleibt R_n konstant, $r_n(x_0 + \theta h)$ aber kann sich ändern, da θ von p abhängt, es bleibt jedoch immer absolut kleiner als ε; R_{n+p} und $r_{n+p}(x_0 + \theta h)$ konvergieren gegen Null, also wird $|R_n| \leqq \varepsilon$.

Folglich ist die Reihe für $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ gleichmäßig konvergent, da man zu einem beliebig klein fixiertem positivem ε eine positive Zahl N bestimmen kann, sodaß für $n \geqq N$, $|R_n| \leqq \varepsilon$ wird. Die einzelnen Glieder der Reihe haben zu Grenzwerten:

$$f_0'(x_0), \quad f_1'(x_0), \quad f_2'(x_0), \quad \cdots.$$

Daher konvergiert auch $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ gegen einen bestimmten Grenzwert, und es wird:

$$F'(x_0) = f_0'(x_0) + f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \cdots.$$

§ 16. Übungen.

97. 1) Ist die Summe s_n der ersten n Glieder einer Reihe für jedes n gegeben, so ist damit auch die ganze Reihe gegeben; diese ist: s_1, $s_2 - s_1$, $s_3 - s_2$, $\cdots$ und das allgemeine Glied ist $u_n = s_{n+1} - s_n$.

2) Ist s_n eine ganze rationale Funktion von n, so gilt Gleiches von u_n. Ist umgekehrt u_n eine ganze Funktion von n, so kann man eine zweite ganze Funktion von n bilden, $F(n)$, die für ganze positive Werte von n mit s_n übereinstimmt.

3) Zu beweisen, dafs für die Reihen:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \cdots \quad u_n = n + 1,$$

$$1,\ 3,\ 6,\ 10 \cdots \quad u_n = \frac{1}{2!}(n+1)(n+2),$$

$$1,\ 4,\ 10,\ 20 \cdots \quad u_n = \frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

beziehungsweise:

$$s_n = \frac{1}{2!}n(n+1),\quad \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2),$$

$$\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3),\ \cdots$$

ist.

4) Zu beweisen, dafs

$$0^p + 1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p =$$

$$\frac{A_0}{p+1}n^{p+1} + A_1 n^p + pA_2 n^{p-1} + p(p-1)A_3 n^{p-2} + \cdots + p!A_p n$$

ist, wo $A_0, A_1, A_2, \cdots$ numerische Konstante sind, die sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$A_0 = 1,$$

$$\frac{A_0}{2!} + A_1 = 0,$$

$$\frac{A_0}{3!} + \frac{A_1}{2!} + A_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_0}{r!} + \frac{A_1}{(r-1)!} + \cdots + \frac{A_{r-2}}{2!} + A_{r-1} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus findet man:

$$A_0 = 1,\quad A_1 = -\frac{1}{2},\quad A_2 = \frac{1}{12},\quad A_3 = 0,\quad A_4 = -\frac{1}{720},\ \cdots.$$

5) Ist s_n eine rationale Funktion von n, so gilt Gleiches für u_n. Umgekehrt aber, ist u_n eine rationale Funktion von n, so giebt es im Allgemeinen keine rationale Funktion von n, welche den Wert von s_n darstellt.

So giebt es z. B. keine rationale Funktion von n, welche die Summe s_n von $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$, darstellt.

Nimmt man nämlich an, dafs s_n durch den Bruch $\frac{f(n)}{\varphi(n)}$ dargestellt würde, in dem $f(n)$ und $\varphi(n)$ ganze ganzzahlige Funktionen ohne gemeinsamen Teiler sind, so müfste sein:

$$\frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)} - \frac{f(n)}{\varphi(n)} = \frac{1}{n+1}$$

oder

$$(n+1)f(n+1)\varphi(n) - (n+1)f(n)\varphi(n+1) = \varphi(n)\varphi(n+1).$$

Der Einfachheit halber sei n eine Primzahl. Die linke Seite ist teilbar durch $n+1$, also auch die rechte. Mithin ist entweder $\varphi(n)$ oder $\varphi(n+1)$ durch $n+1$ teilbar. Ist zunächst $\varphi(n)$ durch $n+1$ teilbar, so ist $\varphi(n+1)$ durch $n+2$ teilbar, also ist dann auch $(n+1)f(n+1)\varphi(n)$ durch $n+2$ teilbar. Da aber $f(n+1)$ und $\varphi(n+1)$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so mufs $\varphi(n)$ durch $n+2$ teilbar sein.

Fährt man so fort, so erkennt man, dafs $\varphi(n)$, das durch $n+2$ teilbar ist, auch durch $n+3$ teilbar ist u. s. w. Dieser Schlufs ist solange anwendbar, bis man zu einer Zahl kommt, die selbst ein Vielfaches von n ist; d. h. $\varphi(n)$ ist teilbar durch $n+1, n+2, \cdots 2n-1$. $\varphi(n)$ wäre also durch n verschiedene lineare Funktionen von n teilbar. Da aber n beliebig grofs gemacht werden kann, so wäre $\varphi(n)$ durch beliebig viele lineare Funktionen von n teilbar. Dies ist aber widersinnig, also ist $\varphi(n)$ nicht durch $n+1$ teilbar.

Ist aber zweitens $\varphi(n+1)$ durch $n+1$ teilbar, so zeigt man auf ähnliche Weise, dafs $\varphi(n+1)$ auch durch $n, n-1, \cdots$ teilbar ist und dies ist ebenfalls widersinnig.

6) Zu beweisen, dafs

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots,$$

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+p-1)} = \sum_0^\infty {}^n \frac{1}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p)},$$

$$\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{1(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} + \cdots + \frac{1}{n(p+n)} + \cdots.$$

7) Die Summe

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{mn},$$

in der m und n ganze positive Zahlen sind, hat für $n = \infty$ den Grenzwert $\log m$.

Man beweist diesen Satz leicht, indem man sich der Formeln der Nr. 61 bedient.

8) Der Rest einer Reihe mit positiven Gliedern, in welcher $\sqrt[n]{u_n} < h < 1$ ist, ist (Nr. 58) kleiner als $\frac{h^n}{1-h}$.

9) Der Rest einer Reihe, in welcher $|n^{1+\alpha} u_n| < A$ ist, wobei $\alpha > 0$ sein soll, ist (Nr. 62) absolut kleiner als $\frac{A}{\alpha(n-1)^\alpha}$.

10) Die Reihe:

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots,$$

in der $a_1\, a_2 \cdots$ positive, beständig und unbegrenzt abnehmende Gröſsen sind, konvergiert für alle Werte x, die von $2k\pi$ verschieden sind, wo k eine ganze (positive oder negative) Zahl einschlieſslich der Null bedeutet.

In der That, man setze:

$$s_n = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

und multipliziere beide Seiten mit $2 \sin \frac{x}{2}$. Bedenkt man, daſs

$$2 \cos kx \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{2k+1}{2} x - \sin \frac{2k-1}{2} x$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2 s_n \sin \frac{x}{2} = {} & a_1 \sin \frac{3}{2} x + a_2 \sin \frac{5}{2} x + \cdots + a_n \sin \frac{2n+1}{2} x \\ & - a_1 \sin \frac{1}{2} x - a_2 \sin \frac{3}{2} x - \cdots - a_n \sin \frac{2n-1}{2} x \end{aligned}$$

oder

$$(*) \left\{ \begin{aligned} 2 s_n \sin \frac{x}{2} = {} & - a_1 \sin \frac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \frac{3}{2} x \\ & + (a_2 - a_3) \sin \frac{5}{2} x + \cdots \\ & + (a_{n-1} - a_n) \sin \frac{2n-1}{2} x + a_n \sin \frac{2n+1}{2} x. \end{aligned} \right.$$

Nun konvergiert aber die Reihe der positiven Glieder $a_1 - a_2,\ a_2 - a_3, \cdots$; denn die Summe der n ersten Glieder ist $a_1 - a_{n+1}$ und hat für $n = \infty$ wegen $\lim a_{n+1} = 0$ den Grenzwert a_1. Also konvergiert auch die Reihe:

$$(a_1 - a_2)\sin\frac{3}{2}x + (a_2 - a_3)\sin\frac{5}{2}x + \cdots.$$

Ferner ist $\lim a_n \sin\frac{2n+1}{2}x = 0$, also schließt man aus (*), daß $2s_n \sin\frac{x}{2}$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, und daß folglich, wenn x nicht von der Form $2k\pi$ ist, auch s_n gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Für $x = 2k\pi$ wird die Reihe:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots;$$

diese kann konvergieren oder divergieren. Für $x = (2k+1)\pi$ entsteht der Satz der Nr. 66.

11) Die Reihe:

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots,$$

in der $a_1, a_2, \cdots$ positive, beständig und unbegrenzt abnehmende Größen sind, konvergiert für jeden Wert von x.

12) Die Reihe $+u_0,\ -u_1,\ +u_2,\ -u_3,\ \cdots$ sei konvergent und man setze:

$$\begin{array}{l}\Delta u_0 = u_1 - u_0,\quad \Delta u_1 = u_2 - u_1,\quad \Delta u_2 = u_3 - u_2,\ \cdots\\ \Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0,\quad \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \cdots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{array}$$

dann wird:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2^2}\Delta u_0 + \frac{1}{2^3}\Delta^2 u_0 - \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\Delta^{n-1}u_0 + R_n,$$

wobei:

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2^n}\left[\Delta^n u_0 - \Delta^n u_1 + \cdots\right]$$

ist.

In der That, setzt man:

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots,$$

so wird auch:

$$S = 0 + u_0 - u_1 + u_2 - \cdots.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man nach Division durch 2:

$$S = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}(u_1 - u_0) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) - \cdots$$

oder

$$S = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}[\Delta u_0 - \Delta u_1 + \cdots].$$

Daher konvergiert die Reihe $\Delta u_0, -\Delta u_1, +\Delta u_2, \cdots$ und wenn man:

$$S' = \Delta u_0 - \Delta u_1 + \Delta u_2 - \cdots$$

setzt, so wird:

$$S = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}S'.$$

Setzt man analog:

$$S'' = \Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 - \cdots,$$
$$S''' = \Delta^3 u_0 - \Delta^3 u_1 + \Delta^3 u_2 - \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so erhält man:

$$S' = \frac{1}{2}\Delta u_0 - \frac{1}{2}S'',$$
$$S'' = \frac{1}{2}\Delta^2 u_0 - \frac{1}{2}S''',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S^{(n-1)} = \frac{1}{2}\Delta^{n-1}u_0 - \frac{1}{2}S^{(n)}.$$

Durch Substitution der Werte der S in diese Gleichungen entsteht die zu beweisende Formel.

13) Es ist: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \cdots$

$$= \frac{1}{2x} + \frac{1}{2^2x(x+1)} + \frac{2!}{2^3x(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{2^4x(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots,$$

sobald x keine negative ganze Zahl ist. Diese Formel wird bewiesen, indem man die vorige Transformation anwendet und zeigt, dafs $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$ ist. Setzt man in ihr $x = 1$, so erhält man:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots.$$

Die Reihe linker Hand giebt log 2 (vergl. Nr. 79 u. 66) und konvergiert sehr langsam, die Reihe rechter Hand hingegen konvergiert sehr viel rascher.

Setzt man $x = \frac{1}{2}$, so erhält man:

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \cdots = 1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots.$$

Die Reihe links giebt $\frac{\pi}{2}$ (vergl. Nr. 82) und ist auf diese Weise in eine rascher konvergierende Reihe verwandelt.

14) Zu beweisen, dafs

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots = \frac{u_0}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}\Delta u_0 + \frac{x^2}{(1-x)^3}\Delta^2 u_0 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^n}\Delta^{n-1} u_0 + R_n$$

ist, wo

$$R_n = \frac{x^n}{(1-x)^n}[\Delta^n u_0 + x\Delta^n u_1 + x^2 \Delta^n u_2 + \cdots]$$

gesetzt ist. Vorausgesetzt ist dabei, dafs die Reihe

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

konvergiert und dafs $x \neq 1$ ist.

15) Zu beweisen, dafs für $|x| < 1$

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 -$$
$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots$$

ist.

16) In der Reihenentwickelung von $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ nach dem binomischen Satze haben die Zähler und Nenner der Koeffizienten, wenn sie zu einander relativ prim gemacht sind, nur Faktoren von q zu Teilern.

17) Die Reihenentwickelung von e^x läfst sich aus der Formel

$$e^x = \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

ableiten.

In der That, nimmt man der Einfachheit halber m ganz und positiv an, so wird:

$$(*)\ \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \cdots.$$

Es sei nun n irgend eine ganze Zahl, gröfser als $|x|$ und $m > n$; dann kann man $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = A + B$ setzen, wo A und B die Werte haben:

$$A = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$
$$B = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{m}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Läfst man n fest, während m unbegrenzt wächst, so wird:

$$\lim A = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Andererseits wird:

$$|B| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{|x|^m}{m!}$$

und also um so mehr:

$$|B| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{|x|}{n+1} + \cdots + \frac{|x|^{m-n-1}}{(n+1)^{m-n-1}}\right].$$

Nun ist aber $|x| < n$, also auch $|x| < n+1$, die Glieder in der Klammer bilden daher eine abnehmende geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{|x|}{n+1}$, also wird:

$$|B| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+1}} \quad \text{oder} \quad |B| < \frac{|x|^{n+1}}{n!\,(n+1-|x|)}$$

und man kann setzen:

$$B = \theta \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n!\,(n+1-|x|)}, \quad \text{wo} \quad -1 < \theta < 1.$$

Läfst man jetzt m unbegrenzt wachsen, so bekommen $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ und A bestimmte endliche Grenzwerte; also gilt das Gleiche auch von B und also auch von θ. Setzt man daher $\lim \theta = \vartheta$, so ist $-1 \leqq \vartheta \leqq +1$ und es wird:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \vartheta \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n!\,(n+1-|x|)}.$$

Für $n = \infty$ erhält aber das letzte Glied den Grenzwert null und es entsteht die Entwickelung von e^x (Nr. 70).

Dasselbe Resultat würde man noch schneller durch die Bemerkung erhalten, dafs das Polynom auf der rechten Seite der Formel (*) als eine unendliche Reihe betrachtet werden kann, indem man unendlich viele Glieder gleich null folgen läfst; ihre Glieder sind Funktionen von m und die Reihe ist gleichmäfsig konvergent; also kann man den Satz der Nr. 95 anwenden.

18) Die Reihenentwickelung für $\log(1+x)$ soll aus der Formel $\log a = \lim\limits_{m=\infty} m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$ abgeleitet werden.

Man beweist diese Formel, indem man $m = \frac{1}{h}$ setzt. Dann wird

$$m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right) = \frac{a^h - 1}{h}.$$

und der Grenzwert für $m = \infty$ oder $h = 0$ ist der Wert, welchen die Ableitung von a^x für $x = 0$ annimmt. Man setze in ihr $a = 1 + x$, entwickele nach Potenzen von x und gehe zur Grenze über.

19) Die Reihenentwickelungen für $\sin x$ und $\cos x$ können auch aus den Formeln für die Cosinus und Sinus der vielfachen Winkel abgeleitet werden:

$$(1)\quad \begin{aligned}\sin mz = \binom{m}{1} \sin z \cos^{m-1} z - \binom{m}{3} \sin^3 z \cos^{m-3} z \\ + \binom{m}{5} \sin^5 z \cos^{m-5} z - \cdots,\end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned}\cos mz = \cos^m z - \binom{m}{2} \cos^{m-2} z \sin^2 z \\ + \binom{m}{4} \cos^{m-4} z \sin^4 z - \cdots,\end{aligned}$$

in denen m eine ganze positive Zahl und $\binom{m}{k}$ den Ausdruck $\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$ bedeutet. Für gerades m erhält man:

$$(3)\quad \begin{aligned}\cos mz = 1 - \frac{m^2}{2!} \sin^2 z + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!} \sin^4 z \\ - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!} \sin^6 z + \cdots\end{aligned}$$

und für ungerades m:

$$(4)\quad \begin{aligned}\sin mz = m \sin z - \frac{m(m^2-1^2)}{3!} \sin^3 z \\ + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!} \sin^5 z - \cdots.\end{aligned}$$

In der That, man braucht nur $mz = x$ zu setzen und dann $m = \infty$ werden zu lassen. Die vorstehenden Formeln kann man leicht durch Induktion oder durch Differentiationen beweisen. Aus ihnen lassen sich unzählige andere ableiten durch Differentiationen, Vertauschung von z mit $\frac{\pi}{2} - z$ und algebraische Umformungen. Beachtet man z. B., dafs die rechte Seite in (4) eine ganze Funktion m^{ten} Grades von $\sin z$ ist, und drückt sie durch ein Produkt von m Faktoren aus, so erhält man, wenn $m = 2n + 1$ gesetzt wird:

$$\sin(2n+1)z =$$

$$(5)\quad (2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

20) Die Funktion $\sin x$ läſst sich als unendliches Produkt darstellen und man hat:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

Setzt man nämlich in der Formel (5), $(2n+1)z = x$, so erhält man:

$$\sin x =$$

$$(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Fixiert man eine beliebige ganze Zahl m, die jedoch so groſs ist, daſs $(m+1)\pi > |x|$ ist und setzt man $n > m$, so kann man schreiben:

$$\sin x = A \cdot B.$$

Dabei bedeutet:

$$A = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{m\pi}{2n+1}}\right),$$

$$B = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Ferner hat man $\lim\limits_{n=\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x$ und ebenfalls für $n=\infty$:

$$\lim\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = 1-\frac{x^2}{k^2\pi^2},$$

also wird:

$$\lim A = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right) = P_m.$$

Um B abzuschätzen, beachte man, dafs seine sämtlichen Faktoren kleiner als 1 sind, also ist auch $B < 1$. Aufserdem ist für irgend welche positiven ε:

$$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_h) > 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_h),$$

also wird auch

$$B > 1 - \sin^2\frac{x}{2n+1}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{(m+1)\pi}{2n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

Man beachte jetzt, dafs $\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}$ ist. Wächst ferner z im ersten Quadranten, so nimmt die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ von 1 bis $\frac{2}{\pi}$ ab, denn ihre Ableitung ist negativ. Also hat man für $0 < z < \frac{\pi}{2}$, $\sin z > \frac{2z}{\pi}$. Setzt man in dieser Ungleichung der Reihe nach $z = \frac{(m+1)\pi}{2n+1}, \cdots \frac{n\pi}{2n+1}$, so erhält man:

$$B > 1 - \left(\frac{x}{2n+1}\right)^2\left[\frac{\pi^2}{2^2\left(\frac{(m+1)\pi}{2n+1}\right)^2}+\cdots+\frac{\pi^2}{2^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2}\right]$$

oder einfacher:

$$B > 1 - \frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right].$$

Man beachte jetzt, dafs

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m}-\frac{1}{m+1},$$

$$\frac{1}{(m+2)^2} < \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2},$$

. . . .

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Also wird

$$B > 1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) \quad \text{oder endlich} \quad B > 1-\frac{x^2}{4m}.$$

Man kann also eine Gröfse θ zwischen 0 und 1 bestimmen, so dafs $B = 1 - \theta\frac{x^2}{4m}$ wird.

Man lasse jetzt n unbegrenzt wachsen. Da in der Formel $\sin x = A \cdot B$, A gegen einen endlichen, von null verschiedenen Grenzwert P_m konvergiert, so gilt Gleiches von B; also konvergiert auch θ gegen einen Grenzwert $\lim \theta = \vartheta$ und es wird:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\left(1-\vartheta\frac{x^2}{4m}\right),$$
$$0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Läſst man jetzt $m = \infty$ werden, so entsteht die zu beweisende Formel.

21) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

22) $$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

23) Setzt man

$$s_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots,$$

so wird

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{\pi^2}s_2 - \frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}s_4 - \frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}s_6 - \cdots,$$

sobald $-\pi < x < +\pi$ ist.

24) Unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorigen Nummer wird:

$$\log\cos x = -\frac{(2^2-1)}{\pi^2}x^2 s_2 - \frac{1}{2}\frac{(2^4-1)}{\pi^4}x^4 s_4 - \frac{1}{3}\frac{(2^6-1)}{\pi^6}x^6 s_6 - \cdots,$$

wenn $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ist.

25) $$\operatorname{tang} x = \frac{2(2^2-1)}{\pi^2}s_2 x + \frac{2(2^4-1)}{\pi^4}s_4 x^3 + \frac{2(2^6-1)}{\pi^6}s_6 x^5 + \cdots,$$

wenn $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2s_2}{\pi^2}x - \frac{2s_4}{\pi^4}x^3 - \frac{2s_6}{\pi^6}x^5 - \cdots$$

wenn $-\pi < x < \pi$.

26) $$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2-1^2} + \frac{x}{x^2-2^2} + \frac{x}{x^2-3^2} + \cdots$$

oder auch:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-n+1} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n}\right].$$

27)
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$
$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

Allgemein ist $\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \cdots$ gleich π^{2n} multipliziert mit einem rationalen Koeffizienten.

28) Die Summe der Reihe $(n > 1)$
$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$
ist gleich dem reziproken Werte des unendlichen Produktes:
$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$
in welchem in den Nennern die successiven Primzahlen auftreten.

In der That, nennt man s die Summe der gegebenen Reihe, so hat man:
$$\frac{s}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \cdots$$
und durch Subtraktion ergiebt sich:
$$s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \cdots,$$
wobei auf der rechten Seite als Nenner alle durch 2 nicht teilbaren Zahlen auftreten. Subtrahiert man von dieser letzten Reihe die durch Division mit 3^n aus ihr entstehende Reihe:
$$s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{(3 \cdot 3)^n} + \frac{1}{(3 \cdot 5)^n} + \cdots,$$
so erhält man:
$$s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots,$$
wobei auf der rechten Seite als Nenner alle weder durch 2 noch durch 3 teilbaren Zahlen auftreten.

In ähnlicher Weise erhält man:
$$s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \cdots$$
Fährt man so fort, so wird der Grenzwert der rechten Seite 1 und daher:
$$\frac{1}{s} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right)\cdots$$

29) Es ist eine Reihe $u_0 u_1 u_2 \dots$ gegeben; man soll ein unendliches Produkt bestimmen, so daſs das Produkt seiner n ersten Faktoren gleich der Summe der ersten n Glieder der Reihe ist und umgekehrt.

30) Zu beweisen, daſs:

$$(1+x)(1+rx)(1+r^2x)\cdots(1+r^{n-1}x)=1+\frac{1-r^n}{1-r}x+$$
$$+\frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})}{(1-r)(1-r^2)}rx^2+\frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}r^3x^3+\cdots$$
$$+\frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})\cdots(1-r^{n-k+1})}{(1-r)(1-r^2)\cdots(1-r^k)}r^{\binom{k}{2}}x^k+\cdots+r^{\binom{n}{2}}x^n$$

ist und daſs für $|r|<1$ das unendliche Produkt:

$$(1+x)(1+rx)(1+r^2x)\cdots$$
$$=1+\frac{x}{1-r}+\frac{rx^2}{(1-r)(1-r^2)}+\cdots$$

wird.

31) Die interpolierende Funktion $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ läſst sich durch die Werte der Veränderlichen und der zugehörigen Funktionswerte mit Hülfe von Determinanten ausdrücken. Es ist:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n)=\frac{\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ f(x_2) & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_n) & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}}.$$

32) Die successiven interpolierenden Funktionen von

$$f(x)=x^m,$$

wo m ganz und positiv ist, und von

$$f(x)=\frac{1}{a+x}$$

zu berechnen.

33) Sind

$$f_1(x),\ f_2(x) \cdots f_n(x)$$

n Funktionen von x, und

$$x_1,\ x_2 \cdots x_n$$

n Werte der Veränderlichen, so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1), & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1), & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1), & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

gleich dem Produkte der Determinanten

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1), & f_1(x_1x_2), & f_1(x_1x_2x_3) & \cdots & f_1(x_1x_2\cdots x_n) \\ f_2(x_1), & f_2(x_1x_2), & f_2(x_1x_2x_3) & \cdots & f_2(x_1x_2\cdots x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1), & f_n(x_1x_2), & f_n(x_1x_2x_3) & \cdots & f_n(x_1x_2\cdots x_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}.$$

34) Sind $f_1(x), f_2(x) \cdots f_n(x)$ und $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \cdots \varphi_n(x)$ zwei Systeme von Funktionen, so hat das Verhältnis der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1), & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1), & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1), & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1), & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1), & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n(x_1), & \varphi_n(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

wenn man alle Veränderlichen $x_1\, x_2 \cdots x_n$ gegen denselben Wert x konvergieren läſst, zum Grenzwerte das Verhältnis der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} f_1(x), & f_1'(x) & \cdots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x), & f_2'(x) & \cdots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x), & f_n'(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_1^{(n-1)}(x) \\ \varphi_2(x), & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_2^{(n-1)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n(x), & \varphi_n'(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Viertes Kapitel.

Funktionen von mehreren Veränderlichen. Implicite Funktionen.

§ 1. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

98. Eine Veränderliche u ist eine Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, wenn zu jedem Wertsysteme der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \cdots$, für welches sie definiert ist, ein bestimmter Werte von u gehört. Eine Funktion kann entweder für alle Systeme von Werten der unabhängigen Veränderlichen gegeben sein oder nur für einen Teil von ihnen, der in der verschiedensten Weise begrenzt sein kann.

So ist die Funktion

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

in der a und b Konstante bedeuten, für alle Paare von Werten gegeben, die man x und y zuerteilen kann; hingegen ist die Funktion:

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

wenn man die Wurzel mit dem positiven Zeichen nimmt, nur für die Wertepaare x, y definiert, welche die Ungleichung $1 \geqq x^2 + y^2$ erfüllen. Die Funktion

$$u = \frac{(x+y)!}{x!\, y!},$$

d. h. der Koeffizient von $a^x b^y$ in der Entwickelung von $(a+b)^{x+y}$ ist in der Algebra nur für ganze positive Werte der Veränderlichen definiert.

Beträgt die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen zwei, so kann man die Wertepaare, die man x und y erteilt, geometrisch darstellen. In der That, zeichnet man in einer Ebene ein Cartesisches (orthogonales) Achsenkreuz und markiert die Punkte, deren Koordinaten gleich den x und y erteilten Werten sind, so gehört zu jedem Wertepaar x, y ein Punkt der Ebene und umgekehrt. So ist bei orthogonalen Koordinaten in dem vorletzten Beispiele die Funktion für alle Wertepaare x, y gegeben, die sich im Innern oder auf der Peripherie eines um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises befinden.

Auch die entsprechenden Funktionswerte lassen sich versinnlichen, wenn man im Punkte x, y auf der Ebene ein Lot errichtet (oder zu einer gegebenen Richtung im Raume eine Parallele zieht), dessen (deren) Länge durch den zugehörigen Wert der Funktion gemessen wird. Die Endpunkte dieser Lote bilden ein System von Punkten (eine Fläche), welche den Verlauf der Funktion der beiden Veränderlichen darstellen.

Ist $u = f(x, y, z)$, so kann man in ähnlicher Weise die Systeme von Werten, welche man den Veränderlichen zuerteilen kann, durch Punkte im Raume darstellen, deren Cartesische Koordinaten durch die Werte gegeben sind, welche man den drei Veränderlichen zuerteilt. Wir werden sagen, dafs die Funktion u in einem bestimmten Punkte gegeben ist, wenn sie für das ihm entsprechende Wertsystem der Veränderlichen gegeben ist. Die Punkte, für welche die Funktion gegeben ist, können den ganzen Raum ausfüllen, oder nur einzelne Gebiete.

Weniger einfach lassen sich die Funktionen von mehr als drei Veränderlichen geometrisch darstellen.

99. Wir nennen ein bestimmtes Wertsystem $x_0, y_0, z_0, \cdots$ der Veränderlichen auch die *Stelle* $(x_0, y_0, z_0, \cdots)$. Wir werden ferner sagen, dafs die Werte einer Funktion u von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \cdots$ eine bestimmte Eigenschaft *in der Umgebung oder dem Bereiche einer Stelle* $(x_0, y_0, z_0, \cdots)$ besitzen, wenn man ein System von positiven Zahlen $h, k, l, \cdots$ bestimmen kann, so dafs die Funktion $u = f(x, y, z, \cdots)$ jene Eigenschaft für alle Wertsysteme $x, y, z, \cdots$ erfüllt, welche der Bedingung $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < k$, $|z - z_0| < l, \cdots$ genügen.

Wir werden sagen, dafs die Funktion u von $x, y, z, \cdots$ einen bestimmten Grenzwert A erhält, wenn die unabhängigen Veränderlichen gegen die endlichen Werte $x_0, y_0, z_0, \cdots$ konvergieren, wenn in einer passenden Umgebung der Stelle tende verso

$(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ die Differenz zwischen den Funktionswerten und der Zahl A absolut kleiner ist, als eine beliebig kleine positive Zahl ε.

Allgemeiner werden wir sagen, dafs eine Funktion von mehreren Veränderlichen gegen einen Grenzwert A konvergiert, wenn die eine Reihe der Veränderlichen gegen endliche Grenzwerte konvergiert, und die andere Reihe unbegrenzt wächst, sobald man zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε so viel Zahlen als Veränderliche bestimmen kann, sodafs für alle Werte der ersten Veränderlichen, die sich von dem zugehörigen Grenzwerte um weniger als die entsprechende Zahl unterscheiden, und für alle Werte der zweiten Reihe von Veränderlichen, die gröfser sind als die zugehörigen Zahlen, sich die Funktionswerte um weniger als ε von A unterscheiden.

Die Funktion $u = f(x, y, z, \ldots)$ heifst stetig an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$, wenn ihre Werte gegen $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ konvergieren, sobald $x, y, z, \ldots$ gegen $x_0, y_0, z_0, \ldots$ konvergieren.

Die in den Nummern 9—13 über Grenzwerte bewiesenen Sätze sind auch auf eine beliebige Anzahl von unabhängigen Veränderlichen anwendbar. Man schliefst daraus (Nr. 23), dafs die Funktionen von mehreren Veränderlichen, die sich durch Anwendung einer endlichen Anzahl von Additionen und Multiplikationen auf die Konstanten und Veränderlichen ergeben, d. h. die ganzen rationalen Funktionen, für alle Wertsysteme der Veränderlichen stetig sind. Führt man auch Divisionen ein, so entstehen die gebrochenen rationalen Funktionen und diese sind stetig für alle Wertsysteme, für welche die Nenner nicht verschwinden.

Ist u eine stetige Funktion von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

und setzt man für die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ wiederum stetige Funktionen von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, so wird auch u eine Funktion von diesen neuen Veränderlichen; man nennt sie eine vermöge der Funktionen $x, y, z, \ldots$ zusammengesetzte Funktion; auch sie ist stetig in den neuen Veränderlichen. In der That, läfst man die Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ gegen bestimmte Werte $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots$ konvergieren, so konvergieren die Variabeln $x, y, z, \ldots$ als stetige Funktionen gegen die Werte $x_0, y_0, z_0, \ldots$, welche sie an der Stelle $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots)$ annehmen. Da aber auch f stetig ist, so konvergiert es gegen $f(x_0, y_0, \ldots)$, wenn $x, y, \ldots$ gegen $x_0, y_0, \ldots$ konvergieren; u konvergiert also gegen den Wert, welchen es, als Funktion der $\xi, \eta, \ldots$ betrachtet, an der Stelle $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ annimmt.

Das System der ersten Veränderlichen kann auch aus einer einzigen Veränderlichen bestehen; ist daher u eine stetige Funktion einer einzigen Veränderlichen x, wie e^x, $\log x$, $\sin x$ u. s. w. und setzt man für x eine stetige Funktion von mehreren Veränderlichen, so wird auch u eine stetige Funktion von diesen.

100. Wir werden uns folgender Redeweisen bedienen, die der geometrischen Darstellung von einer, zwei und drei Veränderlichen entnommen sind.

In einem Systeme von n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$ nennen wir (vergl. Nr. 99) einen *Punkt* oder eine *Stelle* $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ jedes System von festen Werten, welche den Veränderlichen erteilt sind; die festen Werte selbst heifsen die *Koordinaten* des betreffenden Punktes.

Eine Reihe von Punkten heifst eine *Punktmenge* oder ein *Bereich.*

Nimmt man eine Reihe von Punkten $(x_1, x_2, \cdots x_n)$, die entsteht, indem wir die x zu stetigen Funktionen einer Veränderlichen t machen, so möge für $t = t_0$ $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\cdots$ $x_n = a_n$ und für $t = t_1$ $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $\cdots$ $x_n = b_n$ werden. Alsdann heifst die Gesamtheit aller Punkte $(x_1, x_2, \cdots x_n)$, die entsteht, wenn t stetig von t_0 bis t_1 variiert, ein *Weg,* welcher die beiden Punkte $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ und $(b_1, b_2, \cdots b_n)$ *verbindet.*

Eine Punktmenge heifst *stetig,* wenn man irgend zwei ihrer Punkte durch einen Weg verbinden kann, dessen Punkte sämtlich der Punktmenge angehören.

Eine Punktmenge heifst *begrenzt,* wenn man Zahlen

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots a_n, b_n$$

bestimmen kann, sodafs für jeden Punkt der Punktmenge

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \quad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \cdots a_n \leqq x_n \leqq b_n$$

wird.

Grenzpunkt einer Punktmenge heifst jeder Punkt, der so beschaffen ist, dafs in einer beliebig kleinen Umgebung von ihm noch Punkte der Punktmenge liegen. Er selbst braucht jedoch nicht der Menge anzugehören.

Wir können jetzt die folgenden Sätze beweisen, die Verallgemeinerungen für die entsprechenden Sätze bei den Funktionen *einer* Veränderlichen sind.

Satz I. Wenn eine Funktion y der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$ beständig, aber nicht unbegrenzt wächst, sobald ihre sämtlichen Veränderlichen gleichzeitig wachsen, so konvergiert sie gegen einen endlichen Grenzwert, wenn die Veränderlichen unbegrenzt wachsen (vergl. Nr. 14).

In der That, da die Werte von y nicht unbegrenzt wachsen, so besitzen sie eine obere Grenze; ist diese gleich l, so wird immer $y < l$ und es existiert zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε immer ein Wert $y > l - \varepsilon$. Dieser Wert möge den Werten $a_1, a_2, \cdots$ der Veränderlichen entsprechen. Erteilt man den Veränderlichen irgend welche Werte, die bezw. nicht kleiner als $a_1, a_2, \cdots$ sind, so wird immer der zugehörige Wert von y gröfser als $l - \varepsilon$ und kleiner als l sein; er unterscheidet sich also von l um weniger als ε, also erhält y den Grenzwert l, wenn die Veränderlichen unbegrenzt wachsen.

Satz II. Wenn die Funktion y der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ an der Stelle $(a_1, a_2, \cdots)$ einen endlichen Grenzwert besitzt, so kann man zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε einen Bereich um $(a_1, a_2, \cdots)$ abgrenzen, sodafs die Differenz zweier Funktionswerte in ihm absolut kleiner als ε ist und umgekehrt.

In der That, man fixiere einen Bereich um $(a_1, a_2, \cdots)$ der Gestalt, dafs die Differenz zwischen den Werten von y in ihm und ihrem Grenzwerte absolut kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann wird die Differenz zwischen irgend zwei Werten von y absolut kleiner als ε, w. z. bew. w.

Umgekehrt, wenn ein Bereich um $(a_1, a_2, \cdots)$ existiert, sodafs die Differenz zwischen irgend zwei Werten von y in ihm absolut kleiner als ε wird, so sei y_0 einer dieser Werte; dann sind alle übrigen y in dem Bereiche zwischen $y_0 + \varepsilon$ und $y_0 - \varepsilon$ enthalten. Sie besitzen daher eine obere Grenze l_o und eine untere l_u, deren Differenz nicht gröfser als 2ε ist. Verkleinert man jetzt die Umgebung des betrachteten Punktes, so nimmt l_o ab, l_u zu und immer bleibt $l_o > l_u$. Also konvergieren beide gegen einen Grenzwert; dieser ist aber bei beiden derselbe, da $l_o - l_u < 2\varepsilon$ beliebig klein wird. Mithin wird $\lim l_o = \lim l_u$ und es sei L ihr gemeinsamer Wert.

Fixiert man eine beliebig kleine Gröfse α, so kann man einen Bereich um $(a_1, a_2, \cdots)$ bestimmen, sodafs $l_o - L < \alpha$, $L - l_u < \alpha$ wird; da nun $l_o < y < l_u$ ist, so wird sich auch y von L um weniger als α unterscheiden oder es wird $\lim y = L$, w. z. bew. w.

Satz III. Ist eine Funktion stetig und nicht null für die Werte $a_1, a_2, \cdots$ der Veränderlichen, so behält sie in der Umgebung der Stelle $(a_1, a_2, \cdots)$ ein konstantes Zeichen.

Zum Beweise vergleiche man Nr. 17.

Satz IV. Ist eine Funktion stetig für alle Punkte eines kontinuierlichen Bereiches und nimmt sie an zwei Stellen des Bereiches die Werte A und B an, so nimmt sie in demselben Bereiche alle Werte zwischen A und B an.

In der That, man zeichne einen Weg in dem Bereiche, der die beiden Punkte verbindet. Ist t die Veränderliche, von der die Werte von $x_1, x_2, \cdots$ abhängen, so wird y eine stetige Funktion von t; diese nimmt die Werte A und B an, also nimmt sie auch jeden Wert zwischen A und B an.

Wenn es möglich ist, die zwei Punkte durch unendlich viele Wege zu verbinden, die keinen Punkt gemein haben, so nimmt auf jedem von ihnen die Funktion jeden Wert zwischen A und B an; sie nimmt dann also jeden Wert zwischen A und B unendlich oft an.

Satz V. Ist y eine Funktion von mehreren Veränderlichen, die in einem begrenzten Bereiche gegeben ist, so giebt es einen Punkt (, der dem Bereiche angehört oder nicht und), der so beschaffen ist, dafs die obere Grenze der Werte, welche die Funktion in jeder Umgebung von ihm annimmt, dieselbe ist, wie die obere Grenze der Werte, welche die Funktion in dem gegebenen Bereiche annimmt.

In der That, es sei l die obere Grenze der Werte von y, mag diese nun endlich oder unendlich grofs sein. Ist x_1 zwischen a_1 und b_1 enthalten, so teile man den gegebenen

Bereich in zwei; der eine werde von den Punkten gebildet, deren x_1 kleiner ist als $\frac{a_1+b_1}{2}$, der andere von denen, für welche x_1 nicht kleiner als $\frac{a_1+b_1}{2}$ ist. Die obere Grenze der Werte y in dem einen der beiden Bereiche ist l. Man teile denjenigen der beiden Bereiche, in dem die obere Grenze der y gleich l ist, in zwei neue Bereiche, indem man das Intervall halbiert, in welchem x_2 variiert und fahre so fort für alle Veränderlichen. Auf diese Weise findet man einen Bereich, in welchem die obere Grenze der Werte y ebenfalls l ist, in dem aber $x_1, x_2, \cdots$ nur ein halb so grofses Intervall durchlaufen können. Verfährt man mit diesem neuen Bereiche ebenso wie mit dem alten, und fährt so fort, so findet man unendlich viele Bereiche, in denen die obere Grenze der Werte von y ebenfalls l ist, und in denen sich die Intervalle, in welchen $x_1, x_2, \cdots$ variieren, fortgesetzt halbieren. Die Enden dieser Intervalle konvergieren also gegen einen endlichen Grenzwert; es seien $a_1, a_2, \cdots$ diese Grenzwerte. Alsdann behaupte ich, dafs $(a_1, a_2, \cdots)$ der gesuchte Punkt ist. In der That, betrachten wir eine beliebige Umgebung von ihm; alsdann ist einer der soeben konstruierten Bereiche ganz in ihm enthalten, also ist die obere Grenze der Werte von y in ihm und also auch in der angenommenen Umgebung gleich l.

Der Satz gilt ebenso für die untere Grenze.

Satz VI. Eine Funktion von mehreren Veränderlichen, die in einem begrenzten Bereiche und in dessen Grenzpunkten gegeben und stetig ist, besitzt einen oberen und einen unteren Grenzwert und nimmt diese Werte thatsächlich an; sie hat also dort ein Maximum und ein Minimum (vergl. Nr. 21).

In der That, es sei $(a_1, a_2, \cdots)$ ein Punkt, sodafs in einer jeden Umgebung von ihm die obere Grenze der Werte von y mit der oberen Grenze der Werte von y in dem gegebenen Bereiche zusammenfällt und es sei y_a der Wert von y in diesem Punkte. Man bestimme nun eine Umgebung von a, sodafs y zwischen $y_a - \varepsilon$ und $y_a + \varepsilon$ enthalten ist; dies geht, weil die Funktion stetig ist. Hieraus schliefst man, dafs in diesem Bereiche und daher auch in jedem gegebenen Bereiche um $(a_1, a_2, \cdots)$ die obere Grenze der Werte y endlich und weder kleiner als $y_a - \varepsilon$ noch gröfser als $y_a + \varepsilon$ ist. Da aber ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, so ist die obere Grenze der Werte von y gleich y_a, w. z. bew. w.

Analog ist die Überlegung für die untere Grenze und das Minimum.

Satz VII. Ist y in einem begrenzten, kontinuierlichen Bereiche und in dessen Grenzpunkten eine stetige Funktion der Veränderlichen $x_1, \cdots x_n$, so kann man zu einer willkürlich gewählten positiven Zahl ε_0 n positive Zahlen $k_1, \cdots k_n$ bestimmen, sodafs die irgend zwei Punkten des Bereiches entsprechenden Werte von y sich um weniger als ε_0 unterscheiden, sobald die Koordinaten der zwei Punkte sich um weniger als $k_1, \cdots k_n$ unterscheiden.

In der That, es seien $h_1, h_2, \cdots h_n$ irgend welche positive Zahlen. Die Punkte des Bereiches, deren Koordinaten sich von denen eines Punktes P um weniger als $h_1 t, h_2 t, \cdots h_n t$ unterscheiden, bilden einen Bereich um P. Läfst man t abnehmen, so entstehen unendlich viele Bereiche, deren jeder den folgenden enthält und die beliebig klein gemacht werden können.

Es sei ε eine beliebige positive Zahl und P ein Punkt des Bereiches. Da y in P stetig ist, so kann man t der Art bestimmen, dafs die Werte von y, welche den Punkten der durch den Wert von t bestimmten Umgebung von P entsprechen, sich von dem Werte des y in P um weniger als ε unterscheiden. Sogar unendlich viele Werte von t erfreuen sich dieser Eigenschaft; denn hat man einen gefunden, so genügen auch alle kleineren Werte von t denselben Bedingungen.

Wir können uns hier auf die Werte von t beschränken, die positiv und kleiner als 1 sind und es sei θ ihre obere Grenze. Der Wert von θ wird von dem von ε abhängen und von der Lage des Punktes P; wir bezeichnen ihn durch:

$$\theta(\varepsilon, P).$$

Setzt man $\varepsilon = \varepsilon_0$, so wird $\theta(\varepsilon_0, P)$ eine Funktion des Punktes P und es sei ϑ die untere Grenze ihrer Werte. Kann man nun beweisen, dafs ϑ nicht null ist, so kann man irgend eine Zahl t kleiner als ϑ wählen und $k_1 = h_1 t, \cdots k_n = h_n t$ setzen. Unterscheiden sich dann die Koordinaten irgend zweier Punkte des Systems um weniger als $k_1, \cdots k_n$, so befindet sich der eine in der Umgebung t des anderen und die Differenz der zugehörigen Funktionswerte wird kleiner als ε_0, sodaſs der Satz bewiesen ist. Es ist also nur noch zu zeigen, daſs ϑ nicht null sein kann.

Es sei A ein Punkt, in dessen Umgebungen die untere Grenze der Werte von $\theta(\varepsilon_0, P)$ ebenfalls ϑ ist. Man betrachte die Funktion

$$\theta(\varepsilon, A)$$

und erteile ε alle positiven Werte unter ε_0. Die Funktion nimmt immer positive Werte an und, wenn ε gegen ε_0 konvergiert, so wächst sie und konvergiert gegen einen positiven von null verschiedenen Grenzwert (der nicht gröſser als $\theta(\varepsilon_0, A)$ ist und) den wir τ nennen. Ich behaupte dann, daſs ϑ nicht kleiner als τ ist.

In der That, es seien ε' und α zwei Werte von ε, sodaſs:

$$\varepsilon' + \alpha \leqq \varepsilon_0$$

ist und es sei $t' < \theta(\varepsilon', A)$, $t^\sigma < \theta(\alpha, A)$ und $t^\sigma < t'$. Ist P ein Punkt der Umgebung von A, die durch den obigen Wert t bestimmt ist, so unterscheiden sich die Werte der Koordinaten von P um weniger als $h_1 t, \cdots h_n t$ von denen von A und der Funktionswert in P unterscheidet sich von dem in A um weniger als α.

Man betrachte die Umgebung von P, welche durch die Zahl $t' - t$ bestimmt ist. Die Koordinaten der Punkte in ihr unterscheiden sich von denen von P um weniger als

$$h_1(t' - t), \cdots h_n(t' - t)$$

und differieren daher von denen von A um weniger als

$$h_1 t', \cdots h_n t';$$

sie gehören also der durch t' definierten Umgebung von A an. In deren Punkten aber unterscheidet sich der Funktionswert von dem in A um weniger als ε', also weicht der P entsprechende Funktionswert von denen in der Umgebung $t' - t$ um weniger als $\varepsilon' + \alpha$ oder ε_0 ab. Also ist:

$$\theta(\varepsilon_0, P) \geqq t' - t.$$

Diese Ungleichung ist für alle Punkte P der Umgebung t von

A erfüllt, also gilt sie auch für die untere Grenze der Werte von θ, also für ϑ und es ist:

$$\vartheta \geqq t' - t.$$

Da man aber die Gröfse t beliebig klein machen kann, so kann diese Relation nur dann erfüllt sein, wenn

$$\vartheta \geqq t'$$

ist. Da aber t' einzig an die Bedingung $t' < \theta(\varepsilon', A)$ geknüpft ist, so schliefst man

$$\vartheta \geqq \theta(\varepsilon', A);$$

dabei ist ε' allein der Beschränkung unterworfen, dafs es ε_0 nicht übersteigt. Da demnach ϑ nicht kleiner als irgend ein Wert $\theta(\varepsilon', A)$ ist, so ist es auch nicht kleiner als ihre obere Grenze oder:

$$\vartheta \geqq \tau, \quad \text{w. z. bew. w.}$$

Zur Ergänzung dieses Beweises kann man hinzufügen, dafs thatsächlich $\vartheta = \tau$ ist. In der That, bestände die Ungleichheit $\vartheta > \tau$, so nehme man irgend eine Gröfse t zwischen ϑ und τ, also $\vartheta > t > \tau$. Dann giebt es in der Umgebung t von A Punkte, in denen der Funktionswert von dem in A um eine Zahl abweicht, die nicht unter ε_0 herabsinkt. Da aber $t < \vartheta \leqq \theta(\varepsilon_0, A)$ ist, so unterscheidet sich jeder Funktionswert in der Umgebung t von A von dem Funktionswerte in A um eine Zahl, die kleiner ist als ε_0. Dies ist ein Widerspruch.

Man könnte den Satz auch dadurch beweisen, dafs man die obere Grenze T der Werte t betrachtet, die so beschaffen sind, dafs in den durch sie bestimmten Umgebungen des Punktes P die Schwankung der Funktion, d. h. die Differenz zwischen ihrer oberen und unteren Grenze, kleiner als eine feste Gröfse ε wird. Man erkennt dann, dafs T eine stetige Funktion von P ist, die niemals verschwindet und dafs daher auch ihr Minimum von null verschieden ist.

§ 2. Partielle Ableitungen und partielle Differentiale.

101. Erteilt man in der Funktion $u = f(x, y, z, \cdots)$ den Gröfsen $y, z, \cdots$ feste Werte, so wird u eine Funktion von x allein, deren etwa vorhandene Ableitung man nach den

gewöhnlichen Regeln berechnen kann, sobald f durch die von uns betrachteten analytischen Operationen gebildet ist. Wir bezeichnen diese Ableitung durch $f_x'(x, y, z \cdots)$ und nennen sie die partielle Ableitung der Funktion f nach der Veränderlichen x. Das Differential von u, das durch Festhalten aller Zahlen $y, z, \cdots$ und durch Änderung von x allein entsteht, nennen wir das partielle Differential von u nach x. Bezeichnen wir es durch $d_x u$, so wird:

$$d_x u = f_x'(x, y, z \cdots)\, dx,$$

wo das Differential dx der unabhängigen Veränderlichen x willkürlich ist. In ähnlicher Weise bildet man die anderen partiellen Ableitungen

$$d_y u = f_y'(x, y, z \cdots)\, dy, \quad d_z u = f_z'(x, y, z \cdots)\, dz, \cdots,$$

wo $dy, dz, \cdots$ ebenfalls willkürliche Gröfsen sind.

Berechnet man aus den vorstehenden Gleichungen die partiellen Ableitungen, so wird:

$$f_x'(x, y, z \cdots) = \frac{d_x u}{dx}, \quad f_y'(x, y, z \cdots) = \frac{d_y u}{dy}, \cdots$$

und die Glieder auf den rechten Seiten können als neue Bezeichnungen der partiellen Ableitungen dienen.

Aus Rücksichten der Bequemlichkeit pflegt man den Index des d im Zähler jedesmal fortzulassen, aber die geraden d durch runde ∂ zu ersetzen; die Veränderliche, nach welcher differentiiert werden soll, ist dann durch den Nenner genügend bezeichnet. So entstehen die Schreibweisen

$$f_x'(x, y, z \cdots) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f_y'(x, y, z \cdots) = \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots.$$

Daher wird das partielle Differential nach x durch $\frac{\partial u}{\partial x}\, dx$ bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dafs der Zähler ∂u von dem Nenner ∂x nicht getrennt werden darf, da beiden eine selbständige Bedeutung nicht zukommt; aus diesem Grunde hat man hier das Zeichen ∂ an Stelle des d eingeführt, und es ist

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx.$$

102. In den gewöhnlichen Fällen besitzt eine Funktion von mehreren Veränderlichen ebenso viele partielle Ableitungen,

als Veränderliche. Diese können ihrerseits wieder partielle Ableitungen besitzen, welche dann partielle Ableitungen zweiter Ordnung heifsen u. s. w. Z. B. hat man im Falle einer Funktion $u = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen zwei partielle Ableitungen erster Ordnung

$$f_x'(x, y) \quad \text{und} \quad f_y'(x, y)$$

zu betrachten. Die erste von ihnen giebt zu zwei partiellen Ableitungen erster Ordnung Anlafs, die wir durch

$$f_{xx}''(x, y) \quad \text{und} \quad f_{xy}''(x, y)$$

bezeichnen, und f_y' führt zu den beiden Ableitungen

$$f_{yx}''(x, y) \quad \text{und} \quad f_{yy}''(x, y).$$

In ähnlicher Weise erhält man die partiellen Differentiale zweiter Ordnung; diese sind die partiellen Differentiale von denen der ersten Ordnung, die unter der Voraussetzung zu berechnen sind, dafs die Differentiale $dx, dy \cdots$ konstant bleiben. Man bezeichnet sie im Falle einer Funktion von zwei Veränderlichen durch die Schreibweisen:

$$d_x d_x u = f_{xx}''(x, y)\, dx^2, \qquad d_y d_x u = f_{xy}''(x, y)\, dx\, dy,$$
$$d_x d_y u = f_{yx}''(x, y)\, dy\, dx, \quad d_y d_y u = f_{yy}''(x, y)\, dy^2,$$

und fährt in dieser Weise fort bei den Differentialen von noch höherer Ordnung. Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$f_{xx}''(x, y) = \frac{d_x d_x u}{dx^2}, \quad f_{xy}'' = \frac{d_y d_x u}{dx dy}, \text{ u. s. w.};$$

kürzer pflegt man zu schreiben:

$$f_{xx}''(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad f_{xy}''(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \cdots.$$

Übrigens ist es unnütz beim Differentiieren auf die Reihenfolge zu achten, in der man nach den einzelnen Veränderlichen differentiiert. Wir behaupten nämlich:

103. Satz. *Eine partielle Ableitung von beliebig hoher Ordnung hängt nicht von der Reihenfolge der Differentiationen ab, sobald die Funktion und ihre Ableitungen bis zu der betrachteten Ordnung stetig sind.*

Man betrachte zuerst eine Funktion von zwei Veränderlichen

$$u = f(x, y),$$

deren partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Es ist zu zeigen, dafs $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ ist.

Man setze:

$$V = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Betrachtet man die Funktion der einen Veränderlichen x

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

dann wird:

$$V = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0);$$

daher ergiebt sich aus einer bekannten Formel

$$V = h\varphi'(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Es ist aber

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)$$

und daher wird nach derselben Formel

$$\varphi'(x) = kf''_{xy}(x, y_0 + \theta_1 k), \qquad 0 < \theta_1 < 1.$$

Setzt man diesen Wert in V ein, so erhält man

$$V = hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k).$$

Vertauscht man aber die Veränderlichen x und y in der vorhergehenden Überlegung und setzt

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

so erhält man

$$V = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta' k), \qquad 0 < \theta' < 1,$$

und daher wird

$$\psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y) = hf''_{yx}(x_0 + \theta_1' h, y)$$

und

$$V = khf''_{yx}(x_0 + \theta_1' h, y_0 + \theta' k).$$

Vergleicht man jetzt die beiden Ausdrücke für V, so erhält man nach Division durch hk:

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_1' h, y_0 + \theta' k).$$

Man lasse jetzt in dieser Gleichung h und k gegen null konvergieren; da die Ableitungen als stetig vorausgesetzt sind, so erhält man

$$f''_{xy}(x_0 y_0) = f''_{yx}(x_0 y_0), \quad \text{w. z. bew. w.}$$

Es sei jetzt u eine Funktion von beliebig vielen Veränderlichen

$$u = f(x_1, x_2, x_3 \cdots).$$

Berechnet man die partiellen Ableitungen irgend einer Ordnung α, indem man der Reihe nach nach den Veränderlichen $x_a x_b \cdots x_h$ differentiiert, so wird $f^{(\alpha)}_{x_a x_b \cdots x_h}(x_1 x_2 x_3 \cdots)$ das Resultat. Betrachtet man diesen Ausdruck nur als Funktion der Veränderlichen $x_k\, x_l$ und hält deshalb die anderen Gröfsen fest, so kann man ihn entweder zuerst nach x_k und dann nach x_l, oder zuerst nach x_l und dann nach x_k differentiieren; man findet so die gleichen Resultate

$$f^{(\alpha+2)}_{x_a \cdots x_h x_k x_l}(x_1, x_2, x_3, \cdots) = f^{(\alpha+2)}_{x_a \cdots x_h x_l x_k}(x_1, x_2, x_3, \cdots).$$

Differentiiert man beide Seiten nach den Veränderlichen $x_m\, x_n\, x_r \cdots$, so wird, wenn β die Ordnung des so entstandenen Differentialquotienten ist:

$$f^{(\beta)}_{x_a \cdots x_h x_k x_l x_m \cdots x_r}(x_1 \cdots) = f^{(\beta)}_{x_a \cdots x_h x_l x_k x_m \cdots x_r}(x_1 \cdots).$$

Also ist es bei einer Reihe von Differentiationen gestattet, die Reihenfolge irgend zweier auf einander folgender Differentiationen zu vertauschen, und folglich auch die Reihenfolge der Differentiationen in beliebiger Weise zu ändern.

§ 3. Totale Differentiale.

104. **Totales Differential** einer Funktion von mehreren Veränderlichen heifst die Summe ihrer partiellen Differentiale. Es wird dadurch bezeichnet, dafs man vor den Funktionsbuchstaben das Zeichen d setzt. Daher wird das totale Differential der Funktion $u = f(x, y, z)$ gleich:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u = f_x'(x, y, z)\,dx + f_y'(x, y, z)\,dy + f_z'(x, y, z)\,dz$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

105. Ist $u = f(x)$ und besitzt die Funktion die Ableitung $f'(x)$, so wird $\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ oder:

$$\Delta u = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

wo α mit Δx unendlich klein wird. Eine ähnliche Formel gilt auch für die Funktionen von mehreren Veränderlichen, es gilt der

Satz. Ist u eine Funktion von mehreren Veränderlichen

$u = f(x, y, z, \cdots)$, *welche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, so wird:*

$$\Delta u = f_x'(x, y, z, \cdots)\Delta x + f_y'(x, y, z, \cdots)\Delta y + f_z'(x, y, z, \cdots)\Delta z + \cdots$$
$$+ \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z + \cdots,$$

wo α, β, γ *mit* $\Delta x, \Delta y, \Delta z \cdots$ *gegen null konvergieren.*

Ist $u = f(x, y)$, so wird:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

oder:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$$
$$+ f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Nun ist:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x f_x'(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)$$
$$= \Delta x\,[f_x'(x, y) + \alpha],$$

wo $\alpha = f_x'(x + \theta\Delta x, y + \Delta y) - f_x'(x, y)$ mit Δx und Δy gegen null konvergiert. Ähnlich wird:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y f_y'(x, y + \theta'\Delta y) = \Delta y[f_y'(x, y) + \beta],$$

wo auch β mit Δx und Δy gegen null konvergiert. Setzt man dies in den Ausdruck für Δu ein, so kommt:

$$\Delta u = \Delta x f_x'(x, y) + \Delta y f_y'(x, y) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$ w. z. bew. w.

Es sei nun:

$$u = f(x, y, z),$$

dann wird:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$
$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$
$$+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z)$$
$$+ f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

oder:

$$\Delta u = \Delta x f_x'(x + \theta\Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$
$$+ \Delta y f_y'(x, y + \theta'\Delta y, z + \Delta z)$$
$$+ \Delta z f_z'(x, y, z + \theta''\Delta z);$$

also wird auch:

$$\Delta u = \Delta x\,[f_x'(x, y, z) + \alpha] + \Delta y\,[f_y'(x, y, z) + \beta]$$
$$+ \Delta z\,[f_z'(x, y, z) + \gamma],$$

wo α, β, γ mit Δx, Δy, Δz unendlich klein werden. Demnach ist:

$$\Delta u = \Delta x f_x'(x, y, z) + \Delta y f_y'(x, y, z) + \Delta z f_z'(x, y, z) \\ + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z,$$

wie behauptet war.

In ähnlicher Weise kann man für Funktionen von mehr Veränderlichen schliefsen.

106. Aus der vorigen Formel leitet man die Regel ab, nach welcher man die zusammengesetzten Funktionen differentiiert.

Es sei $u = f(x, y, z, \cdots)$ und man setze für $x, y, z, \cdots$ Funktionen einer neuen Veränderlichen t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \cdots;$$

dann wird u eine Funktion von t vermöge $x, y, z, \cdots$. Wir wollen annehmen, dafs f lauter stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt, und dafs auch $\varphi, \psi, \chi, \cdots$ ihre ersten Ableitungen nach t besitzen. Erteilt man t einen Zuwachs Δt und nennt $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots$ die zugehörigen Zuwüchse von $x, y, z, \cdots$, Δu den von u, so folgt:

$$\Delta u = f_x'(x, y, z, \cdots) \Delta x + f_y'(x, y, z, \cdots) \Delta y + f_z'(x, y, z, \cdots) \Delta z + \cdots \\ + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z + \cdots$$

und:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f_x'(x, y, z, \cdots) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(x, y, z, \cdots) \frac{\Delta y}{\Delta t} + f_z'(x, y, z, \cdots) \frac{\Delta z}{\Delta t} + \cdots \\ + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta t} + \cdots.$$

Man lasse jetzt Δt null werden; dann werden auch $\Delta x, \Delta y, \cdots$ und mit ihnen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ null. Also erhält man durch Grenzübergang:

$$\frac{du}{dt} = f_x'(x, y, z, \cdots) \frac{dx}{dt} + f_y'(x, y, z, \cdots) \frac{dy}{dt} + f_z'(x, y, z, \cdots) \frac{dz}{dt} + \cdots$$

und:

$$du = f_x'(x, y, z, \cdots) dx + f_y'(x, y, z, \cdots) dy + f_z'(x, y, z, \cdots) dz + \cdots.$$

Die rechte Seite hat jetzt die Form eines totalen Differentiales aber in ihr sind dx, dy, dz, $\cdots$ nicht mehr Differentiale von unabhängigen Veränderlichen, also willkürliche Gröfsen, sondern Differentiale von Funktionen einer Veränderlichen:

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt, \cdots.$$

Wäre z. B. u eine Funktion von einer Veränderlichen x, so fände man:

$$du = \frac{du}{dx}\,dx,$$

eine Formel, welche bereits in Nr. 37 für die Differentiation der Funktion einer Funktion gefunden wurde.

Ist

$$u = x + y - z,$$

so wird $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -1$ und daher:

$$du = dx + dy - dz,$$

wie schon in Nr. 34 gefunden wurde. Ist ferner:

$$u = xyz,$$

so erhält man $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zx$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$ und daher (vergl. Nr. 35):

$$du = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$$

Ist $u = \frac{x}{y}$, so wird $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$ und (Nr. 36):

$$du = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

Für $u = x^y$ erhält man $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \log x$, also (Nr. 41):

$$du = yx^{y-1}\,dx + x^y \log x\,dy.$$

107 Allgemeiner sei jetzt:

$$u = f(x_1\, x_2 \cdots x_n)$$

und es seien $x_1\, x_2 \cdots x_n$ Funktionen von mehreren anderen Veränderlichen $\xi_1\, \xi_2 \cdots \xi_m$; dann wird u eine zusammengesetzte Funktion der ξ vermöge der x. Um die partiellen Ableitungen von u nach ξ_1 zu berechnen, mufs man $\xi_2 \cdots \xi_m$ als fest annehmen und dann wird u eine zusammengesetzte Funktion von ξ_1 vermöge $x_1\, x_2 \cdots x_n$; also wird:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}.$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_m}.$$

Multipliziert man diese partiellen Ableitungen beziehungsweise mit $d\xi_1, d\xi_2, \cdots d\xi_m$ und addiert, so erhält man das totale Differential von u und, wenn man das Polynom rechter Hand ordnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} du = {} & \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m}d\xi_m\right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m}d\xi_m\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_m}d\xi_m\right). \end{aligned}$$

Die Klammern sind dabei beziehungsweise die totalen Differentiale der Funktionen $x_1 x_2 \cdots x_n$, also wird:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Wieder hat die rechte Seite die Form des totalen Differentiales von u, wenn man $x_1, x_2, \cdots x_n$ als unabhängige Veränderliche ansieht. Aber in unserem Falle bedeuten $dx_1, dx_2 \cdots dx_n$ die totalen Differentiale der Funktionen x.

108. Das totale Differential des totalen Differentiales erster Ordnung einer Funktion von mehreren Veränderlichen heifst das totale Differential zweiter Ordnung; bei der Rechnung sind dabei die Differentiale der Veränderlichen als konstant anzusehen. Das totale Differential des totalen Differentiales zweiter Ordnung heifst das totale Differential dritter Ordnung u. s. w.

Ist z. B. u eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y, so wird

$$du = d_x u + d_y u$$

nnd seine partiellen Differentiale sind:

$$d_x du = d_x^2 u + d_x d_y u$$

und

$$d_y du = d_y d_x u + d_y^2 u.$$

Durch Addition ergiebt sich das totale Differential zweiter Ordnung $ddu = d^2u$. Beachtet man, dafs

$$d_y d_x u = d_x d_y u$$

ist, so erhält man:

$$d^2u = d_x^2 u + 2 d_x d_y u + d_y^2 u.$$

In ähnlicher Weise kann man der Reihe nach $d^3u \cdots$ durch die partiellen Differentiale der verschiedenen Ordnungen darstellen.

Mittelst einer symbolischen Bezeichnungsweise ist es leicht, die allgemeinen dabei entstehenden Formeln hinzuschreiben. Man gebe dem symbolischen Produkte:

$$(d_x + d_y + d_z \cdots) v,$$

in welchem v eine Funktion von $x, y, \cdots$ ist, die Bedeutung

$$d_x v + d_y v + d_z v + \cdots.$$

Ist u eine gegebene Funktion von $x, y, \cdots$, so wird

$$du = (d_x + d_y + d_z \cdots) u$$

und es ergiebt sich, wenn man hiervon noch einmal das totale Differential bildet:

$$d^2u = (d_x + d_y + \cdots)(d_x + d_y + \cdots) u.$$

Diese Gleichung schreiben wir:

$$d^2u = (d_x + d_y + \cdots)^2 u$$

und erhalten allgemein

$$d^n u = (d_x + d_y + \cdots)^n u.$$

Um aus dieser Schreibweise den wirklichen Ausdruck für $d^n u$ herzuleiten, braucht man nur die angedeutete symbolische Multiplikation auszuführen. Die successiven symbolischen Multiplikationen werden nach denselben Gesetzen wie die wirklichen ausgeführt, als ob die Buchstaben $d_x d_y \cdots$ Gröfsen bedeuteten. Daher kann man ohne Weiteres die Leibnitzsche Formel für die Potenzierung eines Polynoms auf den symbolischen Ausdruck von $d^n u$ anwenden.

§ 4. Der Taylorsche Satz für die Funktionen mehrerer Veränderlichen.

109. Der Taylorsche Satz (Nr. 67) läßt sich auf die Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen. Es sei eine Funktion der Veränderlichen $x, y, z \cdots$

$$u = f(x, y, z \cdots)$$

und man gebe den Veränderlichen zuerst die Werte $x_0, y_0, z_0 \cdots$, sodann die Werte $x_0 + h,\ y_0 + k,\ z_0 + l, \cdots$.

Setzt man in u

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \cdots$$

ein, so wird u eine zusammengesetzte Funktion von t vermöge $x, y, z \ldots$ und es sei:

$$u = f(x, y, z \ldots) = F(t).$$

Alsdann wird:

$$F(0) = f(x_0, y_0, z_0 \cdots), \quad F(1) = f(x_0 + h,\ y_0 + k,\ z_0 + l \cdots).$$

Besitzt überdies die Funktion $f(x, y, z \ldots)$ alle Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung, so besitzt auch $F(t)$ die successiven Ableitungen bis zu derselben Ordnung und man erhält diese nach der Differentiationsregel für die zusammengesetzten Funktionen; es wird:

$$F'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots.$$

Nun ist aber

$$\frac{dx}{dt} = h, \quad \frac{dy}{dt} = k, \quad \frac{dz}{dt} = l, \cdots$$

also erhält man:

$$F'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l + \cdots,$$

einen Ausdruck, den wir symbolisch schreiben können:

$$F'(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \cdots\right) u;$$

dabei verstehen wir unter dem symbolischen Faktor

$$\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \cdots,$$

wenn wir ihn vor eine Funktion von $x, y, z \ldots$ setzen, die Summe ihrer mit $h, k, l, \ldots$ multiplizierten ersten Ableitungen.

Durch Differentiation von $F'(t)$ erhält man:

$$F''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \cdots\right)^2 u$$

und allgemein

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \cdots\right)^n u.$$

Um diesen symbolischen Ausdruck in den wirklichen überzuführen, braucht man nur die angedeuteten symbolischen Multiplikationen auszuführen; auch hier geschehen die symbolischen Multiplikationen genau so, als ob die Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \cdots$ Zahlen bedeuteten. Daher kann man sofort alle symbolischen Multiplikationen auf das symbolische Polynom anwenden und die Bedeutung des Ausdruckes

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \cdots\right)^n$$

nach der Leibnitzschen Formel für die Potenzierung eines Polynoms ermitteln.

Hieraus erkennt man, daſs $F^{(n)}(t)$ eine ganze homogene Funktion n^{ten} Grades von $h, k, l \ldots$ ist, deren Koeffizienten die partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung von $f(x, y, z \ldots)$ sind, wo $x, y, z \ldots$ die vorhin fixierten Werte $x_0 + ht$, $y_0 + kt, \cdots$ haben.

Man setze jetzt in $F'(t)$, $F''(t) \cdots F^{(n-1)}(t)$, $t = 0$; dann erhält man die Werte $F'(0)$, $F''(0), \cdots F^{(n-1)}(0)$, welche homogene Funktionen von $h, k, \cdots$ und bezw. vom Grade $1, 2, \cdots n-1$ sind. Ihre Koeffizienten sind die Werte der partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0 \cdots)$. Setzt man nun in die Mac-Laurinsche Formel:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \\ + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta), \quad (0 < \theta < 1)$$

für $F(1)$, $F(0)$, $F'(0), \cdots F^{(n)}(\theta)$ ihre Werte ein, so erhält man $f(x_0 + h, y_0 + k, \cdots)$ durch ein endliches Polynom ausgedrückt, dessen erstes Glied $f(x_0, y_0, z_0 \ldots)$ ist und dessen folgende Glieder aufser dem letzten ganze homogene Funktionen $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \cdots n - 1^{\text{ten}}$ Grades von $h, k, l \cdots$ sind, deren Koeffizienten die Werte der partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_0, y_0, z_0 \cdots)$ sind. Das letzte Glied, der Rest, ist ebenfalls eine ganze homogene Funktion n^{ten} Grades von $h, k, l \cdots$, ihre Koeffizienten hängen aber noch von diesen Gröfsen ab und sind die Werte, welche die partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung für die Mittelwerte der Veränderlichen:

$$x_0 + \theta h, \quad y_0 + \theta k, \cdots$$

annehmen. Der Satz gilt, wenn alle Ableitungen von f bis zur n^{ten} Ordnung in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0, \cdots)$ stetig sind.

Reduziert sich beispielsweise die Anzahl der Veränderlichen auf 2, und setzt man successive $n = 1, 2, \cdots$, so erhält man die Formeln:

$$f(x_0 + h, \ y_0 + k) =$$

$$= f(x_0, y_0) + [hf_x'(x_0 + \theta h, \ y_0 + \theta k) + kf_y'(x_0 + \theta h, \ y_0 + \theta k)]$$

$$f(x_0 + h, \ y_0 + k) = f(x_0, y_0) + [hf_x'(x_0, y_0) + kf_y'(x_0, y_0)]$$

$$+ \frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}''(x_0 + \theta h, \ y_0 + \theta k) + 2hkf_{xy}''(x_0 + \theta h, \ y_0 + \theta k)$$

$$+ k^2 f_{yy}''(x_0 + \theta h, \ y_0 + \theta k)], \quad \text{u. s. w.}$$

Ist $f(x, y, \cdots)$ eine ganze Funktion p^{ten} Grades der Veränderlichen, so wird, wenn man die Taylorsche Formel für $n = p + 1$ anwendet, der Rest null; denn alle partiellen Ableitungen $p + 1^{\text{ter}}$ Ordnung sind null. Man erhält auf diese Weise die Entwickelung von $f(x_0 + h, \ y_0 + k, \cdots)$ in ein endliches Polynom, nach Potenzen von $h, k, \cdots$. Umgekehrt, sind alle $p + 1^{\text{ten}}$ Ableitungen einer Funktion null, so ist sie eine ganze Funktion p^{ten} Grades.

Wenn der Rest mit unbegrenzt wachsendem n die Grenze null hat, so wird die linke Seite in eine unendliche Reihe entwickelt. Setzt man:

$$\Delta u = f(x + h, \ y + k, \cdots) - f(x, y, \cdots)$$

und

$$h = dx, \quad k = dy, \cdots,$$

so reduzieren sich die einzelnen Glieder der Reihe nach auf $\frac{du}{1!}, \frac{d^2u}{2!}, \frac{d^3u}{3!}, \cdots$ und man erhält:

$$\Delta u = \frac{du}{1!} + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \cdots.$$

Setzt man in der Taylor'schen Formel:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \cdots$$
$$h = x, \quad k = y, \cdots,$$

so erhält man eine Formel, die eine Verallgemeinerung der Mac-Laurinschen auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ist.

§ 5. Implicite Funktionen. Gleichung zwischen zwei Veränderlichen.

110. Eine Funktion von einer oder mehr Veränderlichen kann analytisch gegeben sein, indem die Operationen vorgeschrieben sind, die man auf die unabhängigen Veränderlichen anwenden muſs um die Funktion zu erhalten; sie heiſst dann *explicite gegeben* oder eine *explicite* Funktion. Sie kann andrerseits durch Gleichungen bestimmt sein, welche sie mit den unabhängigen Veränderlichen verbinden; in diesem Falle heiſst sie *implicite* gegeben oder eine *implicite Funktion.* Wir werden untersuchen, unter welchen Bedingungen eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Veränderlichen irgend eine von diesen als Funktion der übrigen bestimmen können; ist dies der Fall, so bleiben dann die Natur und die Eigenschaften der so erhaltenen Funktionen zu studieren.

Satz. Es sei $f(x, y)$ eine Gleichung zwischen den zwei Veränderlichen x und y und es sei x_0, y_0 ein Wertepaar der Veränderlichen, für welches $f(x_0, y_0) = 0$ ist. Ferner seien die Funktion f und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stetig und endlich sei $f_y'(x_0, y_0)$ nicht null; alsdann giebt es eine und nur eine Funktion y von x, $y = \varphi(x)$, die in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ der vorgelegten Gleichung genügt, sodaſs dort identisch für jedes x, $f(x, \varphi(x)) = 0$ wird, und daſs sie für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Diese Funktion $y = \varphi(x)$ ist stetig und besitzt eine bestimmte, endliche Ableitung.

In der That, es seien h_1 und k_1 zwei positive Zahlen, die so klein sind, daſs für jedes x zwischen $x_0 - h_1$ und $x_0 + h_1$ und für jedes y zwischen $y_0 - k_1$ und $y_0 + k_1$ die Funktion f und ihre beiden ersten Ableitungen stetig sind. Man kann h_1 und k_1 gleichzeitig so klein annehmen, daſs $f_x'(x, y)$ absolut kleiner als eine feste Zahl A ist und daſs

$f_y'(x, y)$, dafs für $x = x_0$, $y = y_0$ nicht verschwindet, immer absolut gröfser als eine endliche Gröfse B ist. Wir können sogar $Ah_1 < Bk_1$ annehmen.

Greift man auf die Taylorsche Formel zurück und beachtet, dafs $f(x_0, y_0) = 0$ ist, so erhält man:

$$f(x_0+h, y_0+k) = hf_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$
$$(0 < \theta < 1).$$

Nimmt man in dieser Formel $|h| \leqq h_1$ und $|k| = k_1$, so ist $x_0 + \theta h$ zwischen $x_0 - h_1$ und $x_0 + h_1$ und $y_0 + \theta k$ zwischen $y_0 - k_1$ und $y_0 + k_1$ enthalten; daher wird:

$$|f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)| < A, \quad |hf_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)| < h_1 A.$$

Andrerseits ist immer $|kf_y'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)| > k_1 B$ und daher wird in dem Ausdrucke für $f(x_0 + h, y_0 + k)$, in den für h und k irgend welche den eben festgesetzten Bedingungen entsprechende Zahlen zu setzen sind, der erste Summand absolut kleiner als der zweite; folglich hat ihre Summe das Vorzeichen des zweiten Gliedes. Dieses wechselt aber sein Vorzeichen je nachdem man $k = + k_1$ oder $= - k_1$ setzt, denn sein erster Faktor thut dies, und der zweite $f_y'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ behält beständig sein Zeichen. Nun ist aber $f(x_0 + h, y_0 + k)$, als Funktion von k betrachtet, stetig und nimmt Werte von entgegengesetztem Vorzeichen an, je nachdem man k die Werte $+ k_1$ oder $- k_1$ erteilt. Also wird $f(x_0 + h, y_0 + k)$ null für einen Wert k zwischen $+ k_1$ und $- k_1$. Er wird aber bei festem h auch nur für einen einzigen solchen Wert null; denn aus den Gleichungen:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_0 + h, y_0 + k') = 0$$

würde nach dem Satze von Rolle folgen, dafs für ein k'' zwischen k und k' auch $f_y'(x_0 + h, y_0 + k'') = 0$ würde. Dies ist aber ausgeschlossen, da $f_y'(x, y)$ für kein Wertepaar in unserem Intervalle verschwindet.

Sieht man also die oben ausgesprochenen Bedingungen als erfüllt an, so giebt es zu einem willkürlich zwischen $x_0 - h_1$ und $x_0 + h_1$ fixierten Werte x immer einen und nur einen Wert y zwischen $y_0 - k_1$ und $y_0 + k_1$, welcher der Gleichung $f(x, y) = 0$ genügt und für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$

annimmt. Die Gesamtheit dieser Werte y bildet aber auch eine stetige Funktion, da die Werte von y sich von y_0 um weniger als k_1 unterscheiden und k_1 beliebig klein gemacht werden kann.

111. Die Funktion y von x, die auf die vorstehende Weise aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ bestimmt ist, besitzt an der Stelle $x = x_0$ eine Ableitung. Denn giebt man x den Wert $x_0 + h$ und nennt $y_0 + k$ den zugehörigen Wert von y, so wird:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0$$

oder

$$hf_x'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0.$$

Also folgt:

$$\frac{k}{h} = -\frac{f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{f_y'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}.$$

Läfst man h jetzt null werden, so wird auch k null; denn y ist eine stetige Funktion x. Ferner wird für verschwindendes h:

$$\lim f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = f_x'(x_0\, y_0)$$

und

$$\lim f_y'(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = f_y'(x_0\, y_0) \neq 0.$$

Mithin konvergiert $\frac{k}{h}$ gegen einen bestimmten, endlichen Grenzwert und es wird:

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)}.$$

Erteilt man x irgend einen anderen Wert und nennt y den zugehörigen Funktionswert, so wird immer, so lange $f_y'(x, y)$ nicht null ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)},$$

und daher ist die Ableitung als Funktion von x und y ausgedrückt, wobei y selbst eine wohlbestimmte Funktion von x ist.

Sind auch die folgenden partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ stetig, so kann man $\frac{dy}{dx}$ von neuem differentiieren, indem man es als eine vermittelst y zusammengesetzte Funktion von x betrachtet. Indem man so fortfährt, erkennt man, dafs die

Funktion y die successiven Ableitungen besitzt und hat ein Mittel sie zu bestimmen.

Man kommt aber leichter zum Ziele, wenn man beachtet, dafs $f(x, y)$ durch Substitution der oben definierten Funktion y von x eine vermittelst y zusammengesetzte Funktion von x wird, die beständig den Wert null hat. Also ist auch ihre Ableitung null und man hat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Funktion von drei Gröfsen x, y, $\frac{dy}{dx}$, die ihrerseits bestimmte differentiierbare Funktionen von x sind, man erhält daher durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Indem man so fortfährt, erhält man Gleichungen, aus denen sich die Werte $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ berechnen lassen. Diese sind aber auch nicht illusorisch, da der Koeffizient der Unbekannten immer $\frac{\partial f}{\partial y}$ und daher nicht null ist.

§ 6. Gleichung zwischen mehreren Veränderlichen.

112. Allgemeiner gilt der:

Satz. Es werde eine Gleichung $f(x_1, x_2 \cdots x_m, x) = 0$ zwischen den $m+1$ Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots x_m, x$ durch das Wertsystem $a_1, a_2 \cdots a_m, a$ der Veränderlichen erfüllt, und es sei in der Umgebung dieses Wertsystems die Funktion f nebst ihren sämtlichen ersten Ableitungen stetig; endlich werde für die Werte a die Ableitung von f nach x nicht null; dann giebt es eine und nur eine Funktion $x = \varphi(x_1, \cdots x_m)$ der Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots x_m$, die in der Umgebung der Stelle $a_1, \cdots a_m$ definiert ist, und die in die Gleiehung $f = 0$ an Stelle von x eingesetzt sie identisch für alle Wertsysteme der Veränderlichen erfüllt; die Funktion ist stetig, und nimmt an der Stelle $x_1 = a_1 \cdots x_m \cdots a_m$ den Wert a an, überdies besitzt sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung.

In der That, man hat:

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2, \cdots a_m+h_m, a+h) = & h_1 f'_{x_1}(a_1+\theta h_1, a_2+\theta h_2, \cdots a+\theta h) \\ & + h_2 f'_{x_2}(a_1+\theta h_1, a_2+\theta h_2, \cdots a+\theta h) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h_m f'_{x_m}(a_1+\theta h_1, a_2+\theta h_2, \cdots a+\theta h) \\ & + h f'_x(a_1+\theta h_1, a_2+\theta h_2, \cdots a+\theta h). \end{aligned}$$

Man nehme an, dafs für alle Werte $x_1, x_2 \cdots x_m, x$, die beziehungsweise in den Intervallen enthalten sind:

$$a_1 - k_1,\ a_1 + k_1;\ \cdots\ a_m - k_m,\ a_m + k_m;\ a - k,\ a + k,$$

$|f'_{x_1}| < A_1$, $|f'_{x_2}| < A_2, \cdots |f'_{x_m}| < A_m$ und $|f'_x| > A$ seien, und dafs die Zahlen $k_1, k_2, \cdots k_m$ so klein gewählt sind, dafs

$$|A_1 k_1 + A_2 k_2 + \cdots + A_m k_m| < Ak$$

wird.

Wenn in dem Ausdruck für

$$f(a_1 + h_1,\ a_2 + h_2,\ \cdots\ a_m + h_m,\ a + h)$$

die Gröfsen $h_1, h_2, \cdots h_m$ absolut kleiner als die festen Gröfsen $k_1, k_2, \cdots k_m$ gewählt werden, und wenn man h die beiden Werte $+k$ und $-k$ giebt, so ist die Summe der ersten m Glieder jenes Ausdruckes immer absolut kleiner als das letzte; daher erhält die Summe aller $m+1$ Glieder das Vorzeichen des letzten Gliedes. Da nun f'_x ein konstantes Vorzeichen behält, so wechselt das letzte Glied und mit ihm die Summe ihr Vorzeichen, wenn man h die beiden Werte $+k$ und $-k$ erteilt.

Daher ist $f(a_1 + h_1, \cdots a_m + h_m, a + h)$ eine stetige Funktion von h, welche ihr Zeichen ändert, wenn man h die beiden Werte $+k$ und $-k$ erteilt; sie verschwindet daher für einen mittleren Wert h, dessen Betrag kleiner als k ist. Sie verschwindet aber auch nur für einen einzigen solchen Wert, solange $h_1, h_2 \cdots h_m$ fest bleiben; denn wäre sie für die beiden Werte h' und h'' von $h = 0$, so müsste ihre Ableitung nach h für einen Wert h''' zwischen h' und h'' verschwinden, oder es wäre $f'_x(a_1 + h_1, \cdots a_m + h_m, a + h''') = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch, weil f'_x in der Umgebung von

$$(a_1, a_2, \cdots a_m, a)$$

überhaupt nicht verschwindet.

Demnach kann man einen Variabilitätsbereich für

$$x_1, x_2, \cdots x_m$$

abgrenzen, der Art, dafs zu jedem Wertsysteme dieser Veränderlichen in ihm ein und nur ein Wert x gehört, der zwischen $a - k$ und $a + k$ enthalten ist. Da man nun k beliebig klein annehmen kann, so ist die Funktion auch stetig und nimmt an der Stelle

$$x_1 = a_1, \; x_2 = a_2, \cdots x_m = a_m$$

den besonderen Wert a an.

113. Die so definierte Funktion x der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_m$ besitzt für die Werte der Veränderlichen, welche in den betrachteten Intervallen enthalten sind, alle partiellen Ableitungen erster Ordnung. Man braucht ja nur $x_2, \cdots x_m$ konstant anzunehmen, dann wird x eine implicite Funktion der einen Veränderlichen x_1; wir kommen daher auf den in Nr. 110 und 111 betrachteten Fall und erhalten diese Ableitung aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} = 0.$$

In ähnlicher Weise sind die übrigen partiellen Ableitungen gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_2} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_m} = 0.$$

Aus ihnen erhält man die partiellen Ableitungen ausgedrückt durch die Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_m$ und durch die Funktion x.

Besitzt die Funktion f auch die partiellen Ableitungen höherer Ordnung, so wird auch x eine Funktion von

$$x_1, x_2, \cdots x_m,$$

welche die partiellen Ableitungen der entsprechenden Ordnung besitzt; man findet diese, indem man die Ausdrücke für die ersten Ableitungen von neuem differentiiert.

Nachdem man aber ihre Existenz erkannt hat, kann man einfacher verfahren und jede der m vorstehenden Differentialgleichungen nach allen unabhängigen Veränderlichen differentiieren. Man erhält so die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

. . . .

aus denen man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung berechnen kann, u. s. w.

§ 7. System von zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen.

114. Es sei ein System von zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen gegeben

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

und wir wollen voraussetzen, dafs es von den Werten x_0, y_0, z_0 der Veränderlichen erfüllt wird. In der Umgebung von (x_0, y_0, z_0) seien überdies F, f und ihre ersten Ableitungen stetig. Wir wollen untersuchen, ob diese Gleichungen in einem x_0 enthaltenden Intervalle y und z als Funktionen von x bestimmen können.

Man beachte zunächst, dafs die erste Gleichung, sobald $F_z'(x_0, y_0, z_0)$ nicht null ist, eine Funktion z von x und y bestimmt:

$$z = \varphi(x, y),$$

welche in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) definiert ist und die Gleichung $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ für alle Werte x, y identisch erfüllt; sie ist zudem stetig und es wird $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$; endlich besitzt z auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Setzt man in die zweite Gleichung $f = 0$ für z die so definierte Funktion von x und y, so entsteht eine Gleichung zwischen x und y, $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$; setzt man:

$$\mathfrak{F}(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y)),$$

so wird $\mathfrak{F}(x, y) = 0$. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine stetige Funktion von x und y, und das Gleiche gilt für ihre Ableitungen

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Die Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ wird aber auch von dem Wertepaar $x_0\, y_0$ erfüllt; denn es wird:

$$\mathfrak{F}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0, \varphi(x_0\, y_0)) = f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ist daher $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}$ nicht null, so giebt es eine und nur eine Funktion y von x

$$y = \psi(x),$$

welche in der Umgebung von $x = x_0$ gegeben und stetig ist, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und der Gleichung $\mathfrak{F}(x, \psi(x)) = 0$ genügt und eine Ableitung besitzt. Man setze endlich $\varphi(x, \psi(x)) = \chi(x)$; dann wird auch $z = \chi(x)$ eine in der Umgebung von x und x_0 definierte, stetige und differentiierbare Funktion, und es wird

$$\chi(x_0) = \varphi(x_0, \psi(x_0)) = \varphi(x_0\, y_0) = z_0.$$

Setzt man endlich in die vorgelegten Gleichungen $F = 0$ und $f = 0$, für y und z die Funktionen ψ und χ von x ein, so erhält man:

$$F(x, \psi(x), \chi(x)) = F[x, \psi(x), \varphi(x, \psi(x))] = 0;$$

denn es wird $F[x, y, \varphi(x\, y)] = 0$, welches auch x und y sein mögen. Aufserdem wird aber auch

$$f(x, \psi(x), \chi(x)) = f[x, \psi(x), \varphi(x, \psi(x))] = \mathfrak{F}(x, \psi(x)) = 0.$$

Die vorgelegten Gleichungen bestimmen also, wenn

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}$$

an der Stelle $(x_0\, y_0\, z_0)$ nicht verschwinden, zwei stetige Funktionen $y = \psi(x)$ und $z = \chi(x)$, welche für $x = x_0$ die Werte y_0 und z_0 annehmen, die den beiden gegebenen Gleichungen genügen und eine Ableitung besitzen.

Da die Funktionen φ und ψ die einzigen sind, welche den vorstehenden Bedingungen genügen, so gilt das Gleiche für ψ und χ.

Die Bedingung $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \gtrless 0$ läfst sich auch durch die Ableitungen der Funktionen F und f ausdrücken, man hat

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

dabei ist $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ durch die Gleichung definiert

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Man erhält daher

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

und die Bedingungen $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ und $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \neq 0$ kommen zurück auf diese

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aber es ist schon die zweite Bedingung für die Existenz der Funktionen ψ und χ ausreichend; in der That, wäre die Determinante nicht null, aber $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, so könnte nicht $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sein und man brauchte nur die beiden Gleichungen mit einander zu vertauschen.

115. Der Beweis, welcher soeben für die Existenz der Ableitungen der Funktionen y und z von x gegeben wurde, gestattet auch diese zu finden.

Auf die oben angegebene Weise ergeben sich die Ableitungen ausgedrückt durch x, y, z. Besitzen F und f auch die höheren partiellen Ableitungen, so kann man die erhaltenen Ausdrücke differentiieren und findet so auch die zweiten und höheren Ableitungen von y und z nach x.

Aber nachdem die Existenz dieser Ableitungen erkannt ist, erhält man sie schneller, wenn man an Stelle von y und z ihre Ausdrücke als Funktionen von x in $F(x, y, z)$ und $f(x, y, z)$ einsetzt, und beachtet, daſs so zwei Funktionen entstehen, deren Wert beständig null ist, und deren Ableitungen daher ebenfalls verschwinden. Differentiiert man nach der Regel für zusammengesetzte Funktionen, so erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen kann man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, die in ihnen linear auftreten, berechnen; denn die Determinante, welche aus den Koeffizienten der Unbekannten gebildet ist, verschwindet nicht nach Voraussetzung. Differentiiert man noch einmal, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{dz}{dx}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+$$
$$+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}=0.$$

Nimmt man zu dieser Gleichung die analoge, in welcher F durch f ersetzt ist, so erhält man zwei Gleichungen für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ und $\frac{d^2 z}{dx^2}$ u. s. w.

Die vorstehende Schlufsweise läfst sich verallgemeinern und auf die allgemeinste Frage anwenden, welche man bei den impliciten Funktionen zu behandeln hat.

§ 8. System von n Gleichungen zwischen $m+n$ Veränderlichen.

116. *Es werde ein System von n Gleichungen zwischen $m+n$ Veränderlichen*

$$f_1(x_1\cdots x_m y_1\cdots y_n)=0,\ \cdots\ f_n(x_1\cdots x_m y_1\cdots y_n)=0$$

durch die Werte

$$a_1\cdots a_m,\ b_1\cdots b_n$$

der Veränderlichen erfüllt; die Funktionen $f_1\cdots f_n$ nebst ihren sämtlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung seien in der Umgebung der Stelle $(a_1\cdots a_n,\ b_1\cdots b_n)$ stetig; schliefslich sei die Determinante:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

an jener Stelle nicht null. Alsdann giebt es ein und nur ein System von Funktionen y der Veränderlichen x:

$$y_1 = \psi_1(x_1 \cdots x_m), \cdots y_n = \psi_n(x_1 \cdots x_m),$$

welches in der Umgebung der Stelle $a_1 \cdots a_m$ bestimmt ist und welches die Gleichungen $f_1 = 0, \cdots f_n = 0$ identisch für unabhängige Veränderliche x erfüllt; $y_1 \cdots y_n$ sind stetige Funktionen, die an der Stelle $a_1 \cdots a_m$ die Werte $b_1 \cdots b_n$ annehmen und alle ersten Ableitungen besitzen.

Die Determinante J, welche aus den partiellen Ableitungen von $f_1 \cdots f_n$ nach $y_1 \cdots y_n$ gebildet ist, heifst die *Funktionaldeterminante* oder *Jacobische Determinante* der Funktionen f in Bezug auf die Veränderlichen y. Ist $n = 1$, so reduziert sie sich auf ein einziges Element, die Ableitung der linken Seite der einzigen Gleichung nach der Veränderlichen, welche man zur Funktion wählen will. Für diesen Fall ist der Satz schon in Nr. 111 bewiesen. Der Satz wird daher allgemein bewiesen sein, wenn unter der Annahme seiner Richtigkeit für ein System von $n-1$ Gleichungen seine Gültigkeit auch für n Gleichungen gezeigt wird.

Ist $J \neq 0$, so können die Elemente der letzten Vertikalreihe nicht alle verschwinden. Es sei daher $\frac{\partial f_n}{\partial y_n} \neq 0$; alsdann bestimmt die Gleichung:

$$f_n(x_1 x_2 \cdots x_m y_1 \cdots y_n) = 0$$

eine und nur eine Funktion y_n von $x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_{n-1}$

$$y_n = \varphi(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_{n-1})$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_{n-1})$, welche der Gleichung $f_n = 0$ genügt, stetig ist und die ersten partiellen Ableitungen besitzt; überdies ist:

$$b_n = \varphi(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_{n-1}).$$

Setzt man an Stelle von y_n die Funktion φ in die Gleichungen $f_1 = 0, \cdots f_{n-1} = 0$ ein, so entstehen $n-1$ neue Gleichungen zwischen den Veränderlichen $x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_{n-1}$, die wir schreiben können:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \cdots F_{n-1} = 0.$$

Dabei bedeutet:

$$F_i(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_{n-1}) = f_i(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_{n-1}, \varphi(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_{n-1})),$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots n-1.$$

Diese $n-1$ Gleichungen zwischen $m + (n-1)$ Veränderlichen sind an der Stelle $(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_{n-1})$ erfüllt; denn es ist:

$$F_i(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_{n-1}) = f_i(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_{n-1}, \varphi(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_{n-1}))$$
$$= f_i(a_1 \cdots a_m, b_1 \cdots b_n) = 0.$$

Die Funktionen F sind stetig und besitzen die partiellen Ableitungen erster Ordnung; denn sie sind vermöge φ zusammengesetzt; φ ist aber stetig und besitzt die partiellen Ableitungen. Überdies hängt die Jacobische Determinante von F, wie wir jetzt sehen werden, von der von f ab.

Wir addieren in der Determinante J zu den Elementen der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \cdots n-1^{\text{ten}}$ Kolonne die der letzten, nachdem wir sie beziehungsweise mit $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}}$ multipliziert haben; wir erhalten so:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Differentiiert man die Funktion F_i $(i = 1, 2, \cdots n-1)$ nach der Veränderlichen y_j $(j = 1, 2, \cdots n-1)$, so erhält man:

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \quad (i, j = 1, 2 \cdots n-1).$$

Differentiiert man die Funktion 0, die aus f_n entsteht, wenn man für y_n die Funktion φ einsetzt, so wird:

$$\frac{\partial f_n}{\partial y_1} + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

Daher wird:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Nennt man also J' die Funktionaldeterminante der F, so wird

$$J = \frac{\partial f_n}{\partial y_n} J'.$$

Da nun $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ nicht null ist, und ebenso J nicht verschwindet, so hat auch J' einen bestimmten endlichen Wert, der von null verschieden ist.

Demnach genügen die Gleichungen $F_1 = 0, \cdots F_{n-1} = 0$ allen in dem Satze angegebenen Bedingungen, und ihre Zahl ist $n - 1$. Für diese Zahl ist aber der Satz als erwiesen angenommen, also giebt es ein und nur ein System von Funktionen

$$y_1 = \psi_1(x_1 \cdots x_m) \cdots y_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1 \cdots x_m),$$

welches in der Umgebung der Stelle $(a_1 \cdots a_m)$ definiert ist; die ψ sind stetig, besitzen alle ersten Ableitungen und genügen den Gleichungen $F = 0$. Es wird also für alle x:

$$F_1(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = 0, \cdots F_{n-1}(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = 0,$$

welches auch die Werte der x sein mögen.

Setzt man in:

$$y_n = \varphi(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_{n-1})$$

die Werte der y als Funktionen der x ein, so wird

$$y_n = \varphi(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = \psi_n(x_1 \cdots x_m),$$

so wird auch y_n eine stetige Funktion der x, die sämtliche Ableitungen erster Ordnung besitzt.

Daher sind die Funktionen

$$y_1 = \psi_1(x_1 \cdots x_m) \cdots y_n = \psi_n(x_1 \cdots x_m)$$

Funktionen der x, welche in der Umgebung der Stelle $a_1 \cdots a_m$ definiert, stetig und nach allen x differentiierbar sind; sie nehmen an der Stelle $(a_1 \cdots a_m)$ die Werte $b_1 \cdots b_n$ an und genügen den Gleichungen $f = 0$; denn für $i = 1, 2, \cdots n - 1$ hat man:

$$f_i(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}, \psi_n) = f_i(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}, \varphi(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}))$$
$$= F_i(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = 0$$

und für $i = n$:

$$f_n(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_n) = f_n(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1}, \varphi(x_1 \cdots x_m, \psi_1 \cdots \psi_{n-1})) = 0.$$

Also sind alle Behauptungen des Satzes erwiesen.

117. Der Existenzbeweis für die Ableitungen der ψ gestattet auch sie zu finden; aber, nachdem ihre Existenz erkannt ist, kann man sie leichter auf folgende Weise ermitteln. Setzt man in die linken Seiten der n gegebenen Gleichungen $f = 0$ für die y die Funktionen ψ ein, so entstehen lauter Funktionen von x, welche den konstanten Wert null haben. Daher sind auch ihre Ableitungen null und diese lassen sich nach den Differentiationsregeln für zusammengesetzte Funktionen finden. Durch Differentiation nach x_i ergiebt sich:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0.$$

Dies ist ein System von n linearen Gleichungen mit den Unbekannten

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_i},$$

und diese n Unbekannten lassen sich berechnen, da die Determinante ihrer Koeffizienten die Jacobische Determinante und daher nach Voraussetzung nicht null ist. Setzt man $i = 1, 2, \cdots m$, so entstehen m Gleichungssysteme, aus denen man alle partiellen Ableitungen erster Ordnung berechnen kann. Sie drücken sich aus durch die partiellen Ableitungen erster Ordnung von den f, die ihrerseits wieder von den unabhängigen Veränderlichen x und von deren Funktionen y abhängen. Besitzen die f auch die partiellen Ableitungen höherer Ordnung, so gilt Gleiches von den y und man könnte deren

Ableitungen durch successive Differentiation der für die ersten Ableitungen erhaltenen Ausdrücke bekommen. Man verfährt aber einfacher, wenn man die vorigen Gleichungen differentiiert und die so entstehenden Gleichungen nach den Ableitungen höchster Ordnung, die auftreten, auflöst.

§ 9. Bildung von Differentialgleichungen.

118. Eine Gleichung zwischen den unabhängigen Veränderlichen, ihren Funktionen und deren Ableitungen heifst eine *Differentialgleichung.* Man unterscheidet gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, je nachdem die Ableitungen von Funktionen einer einzigen oder mehrerer Veränderlichen gebildet sind. Ferner heifst bei einer Differentialgleichung mit nur einer unabhängigen Veränderlichen und einer Funktion von ihr die *Ordnung* der Gleichung die höchste Ordnung, welche bei den Ableitungen auftritt.

Ist y eine Funktion von x, welche implicite durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist — ein Fall, auf den sich die expliciten Funktionen zurückführen lassen —, so erhält man durch Differentiation nach x die Differentialgleichuug erster Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ihr genügt die Funktion y und sie dient uns dazu, die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen. Durch weitere Differentiation dieser Gleichungen erhält man Differentialgleichungen höherer Ordnungen (Nr. 111).

Indem man die ursprüngliche Gleichung mit irgend einer ihrer Differentialgleichungen kombiniert, kann man andere Differentialgleichungen ableiten, die sämtlich von der Funktion y befriedigt werden. Von der Willkürlichkeit einer solchen Kombination kann man Gebrauch machen, um einfache oder einem bestimmten Zwecke entsprechende Gleichungen zu erhalten.

Ist zum Beispiele

$$y = X^m$$

und X eine Funktion von x, m eine gegebene (rationale oder irrationale) Konstante, so entsteht durch Differentiation die Gleichung

$$y' = mX^{m-1}X'.$$

Multipliziert man diese mit X und berücksichtigt die gegebene Gleichung, so erhält man

$$Xy' = myX',$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, in der die m^{te} Potenz von X nicht auftritt.

Es sei ferner:

$$y = \arcsin x;$$

dann wird:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oder} \quad y'\sqrt{1-x^2} = 1,$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die transcendente Funktion $\arcsin x$ nicht auftritt. Wenn man noch einmal differentiiert, kann man auch das Wurzelzeichen fortschaffen; man erhält:

$$y''\sqrt{1-x^2} - y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

oder

$$y''(1-x^2) - y'x = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren linke Seite linear und homogen in y' und y'' und wenigstens ganz und rational in x ist.

119. Durch Kombination der gegebenen Gleichung mit den aus ihr durch Differentiation entstehenden kann man Konstante herausschaffen, die in der gegebenen Gleichung auftraten und auf diese Weise Differentialgleichungen ermitteln, denen nicht nur von der betrachteten Funktion y, sondern auch von allen den Funktionen y genügt wird, die aus der gegebenen Gleichung entstehen, wenn man den Wert der Konstanten ändert, von denen die Differentialgleichung frei ist.

So definiert die Gleichung:

$$(1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

bei orthogonalen Koordinatenachsen x, y einen Kreis, und sie definiert gleichzeitig y implicite als Funktion von x. Durch Differentiation erhält man

$$(2) \qquad (x-a) + (y-b)\,y' = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche den Parameter r nicht mehr enthält. Andrerseits kann man durch Kombination von (1) und (2) a eliminieren und erhält:

$$(y-b)^2(1+y'^2)-r^2=0.$$

In ähnlicher Weise könnte man auch b eliminieren. Will man aber gleichzeitig mehrere Konstante eliminieren, so differentiiere man (2). Man erhält:

$$1+y'^2+(y-b)y''=0. \tag{3}$$

In dieser Gleichung fehlen a und r. Differentiiert man noch einmal, so wird:

$$3y'y''+(y-b)y'''=0 \tag{4}$$

und aus (3) und (4) erhält man durch Elimination von b oder besser $y-b$ schliefslich

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0. \tag{5}$$

Dies ist eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher jede Funktion y von x genügt, die durch (1) definiert ist, welches auch die Werte von a, b und r sein mögen.

Ähnliche Eliminationen kann man bei den Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen oder bei partiellen Differentialgleichungen ausführen, wie wir solche in den Nrn. 113, 115, 117 erhalten haben.

120. Behandelt man aber partielle Differentialgleichungen, so kann man nicht nur Konstante, sondern auch Funktionen eliminieren. Es sei z. B.:

$$F(u,v)=0$$

eine Gleichung zwischen u und v und es seien u und v gegebene Funktionen von drei Veränderlichen x, y, z. Dann haben wir eine Gleichung zwischen x, y und z, welche — wie wir annehmen — z als Funktion von x und y bestimmt. Durch Differentiation nach x und y erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$, die in ihnen linear und homogen auftreten, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x}, & -\frac{\partial z}{\partial y}, & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für z, welche von der Funktion F ganz frei ist.

§ 10. **Homogene Funktionen.**

121. Man nennt:

$$u = f(x, y, z \cdots)$$

eine homogene Funktion n^{ten} Grades der Veränderlichen $x, y, z \cdots$, wenn für jedes t:

$$f(tx, ty, tz \cdots) = t^n f(x, y, z \cdots) \tag{1}$$

ist. So sind z. B.:

$$x^2 + y^2, \quad \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

homogene Funktionen von den Graden 2, — 1, 0.

Satz. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von einer homogenen Funktion n^{ten} Grades sind homogene Funktionen $n-1^{\text{ten}}$ Grades.

In der That, man differentiiere die Identität, welche die homogenen Funktionen definiert, nach x; dann erhält man:

$$f_x'(tx, ty, tz \cdots)\frac{\partial(tx)}{\partial x} = t^n \cdot f_x'(x, y, z \cdots).$$

Da aber $\frac{\partial(tx)}{\partial x} = t$ ist, so folgt nach Division durch t:

$$f_x'(tx, ty, tz \cdots) = t^{n-1} f_x'(x, y, z \cdots);$$

das heißt, f_x' ist eine homogene Funktion vom Grade $n-1$.

Hieraus folgt, daſs die Ableitungen zweiter Ordnung homogene Funktionen vom Grade $n-2$ und allgemein die Ableitungen h^{ter} Ordnung homogene Funktionen vom Grade $n-h$ sind.

Satz (von Euler). *In einer homogenen Funktion ist die Summe der Produkte ihrer partiellen Ableitungen mit der entsprechenden Veränderlichen gleich dem Produkte aus der Funktion und ihrem Grade und umgekehrt.*

In der That, differentiiert man die Gleichung (1) nach t, so erhält man:

$$f_x'(tx, ty, tz \cdots)x + f_y'(tx, ty, tz \cdots)y + f_z'(tx, ty, tz \cdots)z + \cdots$$
$$= nt^{n-1}f(x, y, z \cdots).$$

Setzt man also $t = 1$, so wird:

$$f_x'(x, y, z \cdots)x + f_y'(x, y, z \cdots)y + f_z'(x, y, z \cdots)z + \cdots = nf(x, y, z \cdots)$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial z}z + \cdots = nu.$$

Diese partielle Differentialgleichung beweist den Satz.

Umgekehrt, genügt die Funktion $f(x, y, z \cdots)$ der Gleichung $f_x'(x, y, z \cdots)x + f_y'(x, y, z \cdots)y + \cdots = nf(x, y \cdots)$, welches auch die Werte der Veränderlichen sein mögen, so erhält man durch Substitution von $tx, ty \cdots$ an Stelle von $x, y \cdots$:

$$f_x'(tx, ty, tz \cdots)tx + f_y'(tx, ty \cdots)ty + \cdots = nf(tx, ty \cdots).$$

Nun ist aber die Ableitung der Funktion

$$F(t) = \frac{f(tx, ty \cdots)}{t^n}$$

nach t gleich:

$$F'(t) = \frac{t[f_x'(tx, ty \cdots)x + f_y'(tx, ty \cdots)y + \cdots] - nf(tx, ty \cdots)}{t^{n+1}}.$$

Zufolge der obigen Gleichung ist diese aber null, also ist $F(t)$ konstant und es ist $F(t) = F(1)$. Also ergiebt sich durch Substitution der Werte von $F(t)$ und $F(1) = f(x, y \cdots)$:

$$f(tx, ty \cdots) = t^n f(x, y \cdots),$$

wie behauptet war.

Differentiiert man die Gleichung (1) mehrmals nach t und setzt dann $t = 1$, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} y^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} xy + \cdots = n(n-1)u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

also eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen verschiedener Ordnungen, denen die Funktion u genügt. Sie sind jedoch sämtlich Folgerungen aus den vorhergehenden Sätzen und entstehen, wenn man das Eulersche Theorem auf die Ableitungen von u anwendet.

§ 11. **Funktionaldeterminanten.**

122. Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante der n Funktionen $y_1 \cdots y_n$ nach den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ heifst, wie erwähnt, die aus den n^2 partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen gebildete Determinante:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Man pflegt sie einfach so zu bezeichnen:

$$J = \frac{D(y_1, y_2, \cdots y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots x_n)} = \frac{Dy}{Dx}.$$

Setzt man z. B.:

$$y_1 = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2,$$
$$y_2 = a' x_1^2 + 2b' x_1 x_2 + c' x_2^2,$$

so erhält man:

$$\frac{1}{4} \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} a x_1 + b x_2, & b x_1 + c x_2 \\ a' x_1 + b' x_2, & b' x_1 + c' x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Sind die Funktionen y die ersten Ableitungen einer Funktion u von n Veränderlichen, so ist ihre Jacobische Determinante die Determinante der zweiten Ableitungen von u (Hessesche Determinante).

Satz I. Sind $y_1 \cdots y_n$ Funktionen von $u_1 \cdots u_n$ und sind diese wieder Funktionen von $x_1 \cdots x_n$, so ist die Jacobische Determinante der y nach den x gleich der Jacobischen Determinante der y nach den u multipliziert mit der Jacobischen Determinante der u nach den x (Nr. 37).

In der That, das Element $\frac{\partial y_r}{\partial x_s}$ der Determinante $\frac{Dy}{Dx}$ hat den Wert:

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s} = \frac{\partial y_r}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + \frac{\partial y_r}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + \cdots + \frac{\partial y_r}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_s};$$

also ist nach dem bekannten Multiplikationssatze der Determinanten:

$$\frac{Dy}{Dx} = \frac{Dy}{Du} \cdot \frac{Du}{Dx},$$

w. z. bew. w.

Satz II. Sind die Veränderlichen y Funktionen der x und ist die Jacobische Determinante nicht null, so kann man die x als Funktionen der y betrachten und die Jacobischen Determinanten der beiden Systeme sind zu einander reziprok.

In der That, betrachtet man die y als Funktionen der x und die x als Funktionen der y, so ergiebt sich durch Anwendung des vorigen Satzes:

$$\frac{Dy}{Dy} = \frac{Dy}{Dx} \cdot \frac{Dx}{Dy}.$$

Die Determinante linker Hand hat in der Hauptdiagonale lauter Einsen statt Nullen, also ist ihr Wert 1 und es wird:

$$\frac{Dy}{Dx} \cdot \frac{Dx}{Dy} = 1,$$

w. z. bew. w.

Satz III. Sind die Funktionen y der Veränderlichen x durch n Gleichungen gegeben:

$$f_1(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n) = 0, \; \cdots \; f_n(x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n) = 0,$$

so wird:

$$\frac{Dy}{Dx} = (-1)^n \frac{\frac{Df}{Dx}}{\frac{Df}{Dy}}$$

(Nr. 111).

In der That, differentiiert man die gegebenen Gleichungen, indem man die y als Funktionen der x betrachtet, so erhält man die Gleichungen:

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial f_i}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}.$$

Bildet man aber die Determinante der $-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, die den Wert $(-1)^n\frac{Df}{Dx}$ hat, so erkennt man, daſs sie gleich dem Produkte der Determinanten ist, die bezw. mit den $\frac{\partial f}{\partial y}$ und den $\frac{\partial y}{\partial x}$ gebildet sind, also ist:

$$(-1)^n\frac{Df}{Dx}=\frac{Df}{Dy}\cdot\frac{Dy}{Dx}$$

und hieraus erhält man die zu beweisende Formel.

Satz IV. Ist die Determinante $\frac{Dy}{Dx}$ *identisch null und sind für ein besonderes Wertsystem der Veränderlichen nicht alle Unterdeterminanten der ersten Horizontale null, so wird in der Umgebung der betrachteten Werte eines der y eine Funktion von den übrigen y.*

Es sei z. B. die Unterdeterminante von $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ nicht null; alsdann erhält man aus den Gleichungen:

$$y_2=\varphi_2(x_1\,x_2\cdots x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=\varphi_n(x_1\,x_2\cdots x_n)$$

$x_2\cdots x_n$ als Funktionen von $x_1\,y_2\cdots y_n$.

Setzt man diese Werte in

$$y_1=\varphi_1(x_1\,x_2\cdots x_n)$$

ein, so wird y_1 eine Funktion von $x_1\,y_2\cdots y_n$.

Betrachtet man jetzt die $y_1\cdots y_n$ als Funktionen von $x_1\cdots x_n$ und diese wieder als Funktionen von $x_1\,y_2\cdots y_n$, so erhält man:

$$\frac{D(y_1\,y_2\cdots y_n)}{D(x_1\,y_2\cdots y_n)}=\frac{D(y_1\,y_2\cdots y_n)}{D(x_1\,x_2\cdots x_n)}\cdot\frac{D(x_1\,x_2\cdots x_n)}{D(x_1\,y_2\cdots y_n)}.$$

Es ist aber:

$$\frac{D(y_1\,y_2\cdots y_n)}{D(x_1\,y_2\cdots y_n)}=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$$

und nach Voraussetzung:

$$\frac{D(y_1\,y_2\cdots y_n)}{D(x_1\,x_2\cdots x_n)}=0.$$

Hingegen wird:

$$\frac{D(x_1\, x_2 \cdots x_n)}{D(x_1\, y_2 \cdots y_n)} = \frac{D(x_2 \cdots x_n)}{D(y_2 \cdots y_n)} = \frac{1}{\frac{D(y_2 \cdots y_n)}{D(x_2 \cdots x_n)}}$$

nach Voraussetzung eine endliche Gröfse; also wird $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0$. Setzt man also in

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \cdots x_n)$$

für $x_2 \cdots x_n$ ihre Werte als Funktionen von $x_1\, y_2 \cdots y_n$ ein, so wird y_1 unabhängig von x_1 und eine Funktion von $y_2 \cdots y_n$ allein, w. z. bew. w.

§ 12. Übungen.

123. 1) Die Funktion

$$\frac{x-y}{x+y}$$

konvergiert mit verschwindenden x und y gegen keinen Grenzwert, sondern nimmt in jeder Umgebung der Stelle (0, 0) jeden beliebigen Wert an.

2) Die Funktion

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

konvergiert mit verschwindenden x und y gegen keinen Grenzwert, sondern nimmt in jeder Umgebung von (0, 0) alle Werte zwischen -1 und $+1$ an. Es ist:

$$\lim_{x=0} f(x, 0) = \lim_{y=0} f(0, y) = 0;$$

erteilt man der Funktion den Wert 0, wenn man $x = 0$, $y = 0$ setzt, so ist $f(x, y)$ für alle Wertepaare von x und y eine stetige Funktion von x und eine stetige Funktion von y, aber keine stetige Funktion des Wertepaares x, y.

3) Die Funktion

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$$

hat folgende Beschaffenheit. Setzt man:

$$x = ht, \quad y = kt$$

und läfst t null werden, so wird der Grenzwert von f immer null, welches auch h und k sein mögen; mit anderen Worten, sind x und y Cartesische Koordinaten eines Punktes in der Ebene, so wird der Grenzwert der Funktion immer null, auf welcher Geraden der Punkt (x, y) auch in den Punkt $(0, 0)$ rücken möge. Trotzdem konvergiert $f(x, y)$ mit verschwindendem x und y gegen keinen Grenzwert, sondern nimmt in jeder Umgebung der Stelle $(0, 0)$ alle Werte zwischen -1 und $+1$ an.

4) Die partielle Ableitung einer Determinante nach einem ihrer Elemente ist die zu dem Elemente gehörige Unterdeterminante.

5) Die Funktion

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ist, wenn man $f(0, 0) = 0$ setzt, eine stetige Funktion von x und y und hat zu ersten Ableitungen:

$$f_x'(x, y) = y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 4y \cdot \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y'(x, y) = x\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 4x \cdot \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

An der Stelle $(0, 0)$ wird zwar:

$$f_x'(0, 0) = f_y'(0, 0) = 0,$$

und es sind daher dort f_x' und f_y' stetig; aber es ist:

$$f_{xy}''(0, 0) = -1, \quad f_{yx}''(0, 0) = 1$$

und es ist daher nicht gestattet, hier die Reihenfolge der Differentiationen zu vertauschen. Es werden hier vielmehr die zweiten Ableitungen unstetig.

Fünftes Kapitel.

Analytische Anwendungen.

§ 1. Ausdrücke, welche unter unbestimmter Form erscheinen.

124. **Form** $\frac{0}{0}$. — Die Differentialrechnung ist nützlich, um den Grenzwert des Quotienten zweier Funktionen $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ zu bestimmen an einer Stelle $x = x_0$, wo Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden. Würde man $x = x_0$ in den Ausdruck für $f(x)$ einsetzen, so würde er die Form $\frac{0}{0}$ annehmen; den *wahren Wert* von $f(x_0)$ pflegt man den Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ zu nennen.

Da man $\varphi(x_0) = 0$ und $\psi(x_0) = 0$ vorausgesetzt hat, so kann man schreiben:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}}.$$

Besitzen die Funktionen φ und ψ eine Ableitung für $x = x_0$ und ist $\psi'(x_0)$ nicht null, so folgt durch Grenzübergang der gesuchte Grenzwert

$$\lim f(x) = \frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Man kann auch auf die Formel Nr. 45 zurückgreifen:

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

in der x_1 eine Gröfse zwischen x und x_0 bedeutet; dann ist vorauszusetzen, dafs in der Umgebung der Stelle x_0, φ und ψ eine Ableitung besitzen und $\psi'(x)$ nicht null ist. Läfst man x gegen x_0 konvergieren, so konvergiert auch x_1 gegen x_0 und wenn das Verhältnis der Ableitungen gegen einen Grenzwert konvergiert, so konvergiert auch das Verhältnis $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gegen denselben Grenzwert.

Würde jede der Ableitungen wieder den Grenzwert null haben, so könnte man auf das Verhältnis der Ableitungen dieselbe Regel anwenden und so auf die zweiten Ableitungen kommen, u. s. w. Hat man allgemein für $x = x_0$:

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = 0, \cdots \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$\psi(x_0) = 0, \quad \psi'(x_0) = 0, \cdots \psi^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ aber } \psi^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

so wird:

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \cdots = \lim \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)}.$$

Dasselbe Resultat kann man aus dem Taylorschen Satze ableiten. In der That hat man:

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + h\varphi'(x_0) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

und also bei unseren Annahmen:

$$\varphi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Ebenso wird:

$$\psi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Dividiert man daher eine Gleichung durch die andere, so wird:

$$\frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0 + \theta h)}{\psi^{(n)}(x_0 + \theta h)}$$

und man erhält durch Grenzübergang

$$\lim_{x=x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)}.$$

125. Bisher wurde vorausgesetzt, dafs x_0 endlich ist; aber die vorhergehenden Formeln lassen sich auch auf den Fall übertragen, in welchem x unendlich grofs wird.

Wird $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x=\infty} \psi(x) = 0$, so setze man $x = \frac{1}{z}$, dann wird:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Wird $x = \infty$, so wird $z = 0$ und man kann die vorigen Betrachtungen jetzt anwenden und das Verhältnis der Ableitungen nach z bilden:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=0} \frac{-\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim_{z=0} \frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Also ist auch in diesem Falle der Grenzwert des Verhältnisses der Funktionen gleich dem Grenzwert des Verhältnisses der Ableitungen.

Man kann auch bemerken, dafs wenn $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = 0$ ist und $\varphi'(x)$ für $x = \infty$ einen endlichen Grenzwert erhält, dafs dieser dann ebenfalls 0 ist. In der That, wäre $\lim \varphi'(x)$ nicht null, so würde von einem bestimmten Werte von x an $\varphi'(x)$ ein konstantes Zeichen haben und daher absolut gröfser als eine feste Zahl A bleiben. Es möge dies von $x = a$ an der Fall sein. Dann schliefst man aus der Formel

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(x_1),$$

wo x_1 zwischen x und a enthalten ist, dafs $|f(x)|$ mit unbegrenzt wachsendem x unbegrenzt wächst und daher unserer Annahme entgegen nicht den Grenzwert null haben kann.

Hieraus geht hervor, dafs, wenn man $x = \infty$ in $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ einsetzt, der Bruch unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint wie $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Trotzdem kann es von einem gewissen Nutzen sein, wenn man an Stelle des Grenzwertes von $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ den der anderen Funktion $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ setzt.

126. **Form** $\frac{\infty}{\infty}$. — Es sei $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ und es werde $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x=\infty} \psi(x) = \infty$. Wenn nun von einem

bestimmten Werte von x an $\psi'(x)$ nicht null ist und der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x = \infty$ einen bestimmten Grenzwert erhält, so konvergiert $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ nach demselben Grenzwerte.

In der That, es bestehen die Gleichungen

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

wo x_1 zwischen x_0 und x enthalten ist. Man schliefst aus ihnen:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}.$$

Es sei $x > x_0$; dann wird auch $x_1 > x_0$. Wir können daher x_0 so grofs wählen, dafs $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ sich von seinem Grenzwerte um eine beliebig kleine Zahl unterscheidet. Läfst man ferner x_0 fest, x aber unbegrenzt wachsen, so wird $\lim\limits_{x=\infty} \varphi(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x=\infty} \psi(x) = \infty$ und daher

$$\lim \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = 1.$$

Man kann also x so grofs wählen, dafs der letzte Bruch sich von seinem Grenzwerte 1 um eine beliebig kleine Zahl unterscheidet. Dann unterscheidet sich aber auch der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ von dem Grenzwerte von $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ um eine beliebig kleine Zahl und es wird

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Diese Gleichung bleibt auch dann noch bestehen, wenn $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty$ ist; denn von den beiden Faktoren, in welche $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ zerlegt ist, kann dann der erste beliebig grofs gemacht werden, während der zweite der 1 beliebig nahe kommt.

Werden in dem Quotienten $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für einen endlichen Wert

a der Veränderlichen Zähler und Nenner unendlich grofs, so setze man $x = a + \frac{1}{z}$; dann wird:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a+\frac{1}{z}\right)}.$$

Da jetzt Zähler und Nenner für $z = \infty$ unendlich grofs werden, so erhält man jetzt:

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a+\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-\varphi'\left(a+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(a+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}} =$$

$$= \lim \frac{\varphi'\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(a+\frac{1}{z}\right)}.$$

Man erhält also auch hier:

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

127. **Form $\infty - \infty$.** Man hat die Differenz zweier Funktionen zu betrachten, die für einen gegebenen Wert von x unendlich grofs werden. Bezeichnet man sie mit $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(x)}$, so läfst sich ihre Differenz

$$\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\psi(x)}$$

auch schreiben:

$$\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

Läfst man jetzt x gegen den besonderen Wert konvergieren, welchen man betrachtet, so konvergieren $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegen null, der fragliche Ausdruck erhält die Form $\frac{0}{0}$ und sein Grenzwert bestimmt sich durch Anwendung der vorigen Regeln.

Form $0 \cdot \infty$. — Man betrachte das Produkt $\varphi(x)\,\psi(x)$ und nehme an, dafs für einen besonderen Wert von x der erste Faktor verschwindet, während der zweite unendlich grofs wird. Man kann dann das Produkt in die Form setzen:

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Der erste Quotient erhält die Form $\frac{0}{0}$, der zweite die Form $\frac{\infty}{\infty}$ und wir kommen auf die früheren Fälle zurück.

Die Formen 0^0, 1^∞, ∞^0. — Es sei die Funktion $\varphi(x)^{\psi(x)}$ vorgelegt und es sei $\varphi(x) > 0$. Für einen besonderen Wert von x sei:

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

oder

$$\varphi(x) = 1, \quad \psi(x) = \infty$$

oder

$$\varphi(x) = \infty, \quad \psi(x) = 0.$$

Indem man den Logarithmus der vorgelegten Funktion bildet, erhält man:

$$\log \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \log \varphi(x).$$

Läſst man jetzt x gegen den fraglichen Wert konvergieren, so ist in jedem der drei Fälle einer der beiden Faktoren des Produktes null, der andere unendlich, man kommt daher auf den vorigen Fall zurück. Hat man den Grenzwert des Logarithmus bestimmt, so ist dieser gleich dem Logarithmus des Grenzwertes und daher erhält man den Grenzwert der vorgelegten Funktion, indem man von den Logarithmen zu den Numeris übergeht.

128. *Beispiele.* 1) Den wahren Wert von

$$y = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad \text{für} \quad x = a$$

zu bestimmen.

Bildet man den Quotienten der Ableitungen, so wird (Nr. 120):

$$\lim y = \lim \frac{m x^{m-1}}{n x^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

2) $y = \frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$.

Man erhält:

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Zu beachten ist, daſs dieses Resultat nur eine Verifikation ist und kein neuer Beweis; denn hier haben wir die Ableitung von $\sin x$ benutzt, um aber zu beweisen, dafs diese gleich $\cos x$ ist, mufsten wir uns des Satzes $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ bedienen.

3) $y = \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ für $x = 0$. $\lim y = \frac{\log a - \log b}{\log c - \log d}$.

4) $y = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}$ für $x = 0$.

$$\lim \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x} = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x + x \cos x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x - x \sin x} = 1.$$

5) $y = \frac{\log(e^x - e^a)}{\log(x - a)}$ für $x = a$ $\left(\text{Form } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim y = \lim \frac{e^x(x-a)}{e^x - e^a} = \lim e^x \lim \frac{x-a}{e^x - e^a} = e^a \lim \frac{1}{e^x} = 1.$$

6) $y = \sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)} - x$ für $x = \infty$ (Form $\infty - \infty$).

Setzt man $x = \frac{1}{z}$, so hat man:

$$y = \frac{\sqrt[n]{(1 + a_1 z)(1 + a_2 z) \cdots (1 + a_n z)} - 1}{z};$$

jetzt nimmt y für $z = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Also folgt durch Anwendung der für diesen Fall gegebenen Regeln

$$\lim y = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n};$$

es ist also $\lim y$ das arithmetische Mittel der a.

7) $y = \frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x$ für $x = 0$ (Form $\infty - \infty$).

Man kann schreiben:

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x)}{x^2 \sin^2 x} =$$
$$= \left(1 + \frac{x}{\sin x} \cos x\right) \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}.$$

Läfst man x null werden, so wird der Grenzwert des ersten Faktors 2. Man braucht also nur noch den zweiten Faktor zu betrachten, der die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Wendet man auf ihn die bekannten Regeln an, so findet man seinen Grenzwert gleich $\frac{1}{3}$ und also wird $\lim y = \frac{2}{3}$.

8) $y = xe^{-ax}$ $(a > 0)$ für $x = \infty$ (Form $\infty \cdot 0$).

Bringt man die Funktion auf die Gestalt $y = \frac{x}{e^{ax}}$, so kommt man auf die Form $\frac{\infty}{\infty}$ und erhält

$$\lim y = \lim \frac{1}{ae^{ax}} = 0.$$

9) Allgemeiner soll der Grenzwert von $y = x^m e^{-ax}$ für $x = \infty$ gefunden werden; a und m sollen positiv sein. Wir kommen auf den vorigen Fall, wenn wir setzen $x^m = z$; dann wird $x = z^{\frac{1}{m}}$, $y = ze^{-\frac{a}{m}z}$. Läfst man x gegen Unendlich konvergieren, so geschieht Gleiches mit z und daher wird

$$\lim_{x=\infty} x^m e^{-ax} = 0.$$

Setzt man in dieser Formel $x = \log z$, so erhält man

$$\lim \frac{(\log z)^m}{z^a} = 0,$$

und, wenn man $z = \frac{1}{t}$ setzt, so wird:

$$\lim_{t=0} t^a (\log t)^m = 0.$$

Man thut gut, diese Resultate sich zu merken.

10) $y = x^x$ für $x = 0$ (Form 0^0).

$$\operatorname{Lim} y = 1.$$

11) $y = (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$ (Form 1^∞).

$$\operatorname{Lim} y = e^a.$$

12) $y = \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ für $x = \infty$ $\left(\text{Form } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Das Verhältnis der Ableitungen von Zähler und Nenner ist:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x.$$

Läfst man x unbegrenzt wachsen, so konvergiert die rechte Seite überhaupt gegen keinen Grenzwert. Hieraus darf man aber nicht schliefsen, dafs auch y für $x = \infty$ keinen Grenzwert besitzt. In der That, bringt man die Funktion auf die Form

$$y = \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}},$$

so wird $\lim\limits_{x=\infty} y = 1$.

§ 2. Funktionen von mehreren Veränderlichen, welche unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

129. Schwieriger ist die Prüfung der Werte, welche der Quotient von zwei Funktionen mehrerer Veränderlichen

$$u = \frac{f(x, y, \cdots)}{\varphi(x, y, \cdots)}$$

annimmt, wenn $x, y, \cdots$ gegen eine Stelle $(x_0, y_0, \cdots)$ konvergieren, an welcher Zähler und Nenner verschwinden.

Setzt man $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt, \cdots$, so wird u eine Funktion von t, welche für $t = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; ihr Grenzwert wird (Nr. 124):

$$\lim u = \lim \frac{f_x'(x_0\, y_0 \cdots) h + f_y'(x_0\, y_0 \cdots) k + \cdots}{\varphi_x'(x_0\, y_0 \cdots) h + \varphi_y'(x_0\, y_0 \cdots) k + \cdots},$$

wenn wir voraussetzen, dafs der Nenner nicht verschwindet. Dieser Grenzwert hängt von den Werten $h, k, \cdots$ ab, es sei denn, dafs die partiellen Ableitungen von f denen von φ proportional sind. Daher konvergiert u gegen verschiedene Grenzwerte, je nach der Art, wie $x, y \cdots$ gegen $x_0, y_0 \cdots$ konvergieren; als Funktion der $x, y, z \cdots$ hat es also im Allgemeinen an der Stelle $(x_0, y_0 \cdots)$ überhaupt keinen Grenzwert. Sind aber die partiellen Ableitungen von f denen von φ proportional, so bedarf es einer weiteren Prüfung, um über die Existenz des Grenzwertes von u zu entscheiden.

Wenn die Funktion φ, die für $x = x_0$, $y = y_0 \cdots$ verschwindet, auch für andere Werte der Veränderlichen in jeder Umgebung von $(x_0, y_0 \cdots)$ ebenfalls verschwindet und, wenn f für die Werte, welche φ annullieren, nicht verschwindet, so nimmt der Quotient $\frac{f}{\varphi}$ beliebig grofse Werte an und in jeder

Umgebung von $x_0\,y_0 \cdots$ den Wert unendlich. In diesem Falle kann daher u keinen endlichen Grenzwert besitzen.

Die folgenden Kriterien können dazu dienen zu erkennen, ob φ in jeder Umgebung von $(x_0, y_0, \cdots)$, diese Stelle selbst ausgenommen, noch null wird oder nicht. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, konvergiert u gegen einen Grenzwert oder nicht. Hierzu müssen wir einige Bezeichnungen vorausschicken, welche die algebraischen Formen betreffen.

130. Eine *Form* n^{ten} Grades nennt man eine ganze rationale, homogene Funktion von mehreren Veränderlichen.

Entwickelt man zum Beispiele

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \cdots)$$

nach dem Taylorschen Satze, so bilden die einzelnen Glieder lauter Formen 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten}, $\cdots$ Grades der Veränderlichen $h, k, \cdots$.

Eine Form heißt *definit*, wenn sie nur dann verschwindet, sobald ihre sämtlichen Veränderlichen verschwinden.

Ein Beispiel hierfür ist die Form $x^2 + y^2 + z^2$.

Eine Form heißt *indefinit*, wenn sie Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen annehmen kann. Eine indefinite Form ist z. B. jede Form von ungeradem Grade, die nicht identisch verschwindet; denn erteilt man den Veränderlichen zuerst ein System von Werten, für welches die Form nicht verschwindet, und sodann dieselben Werte aber mit umgekehrtem Vorzeichen, so nimmt die Form absolut gleiche, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftete Werte an.

Eine Form ist eine stetige Funktion der Veränderlichen; nimmt sie daher Werte von entgegengesetztem Vorzeichen an, so verschwindet sie auch für unendlich viele Wertsysteme der Veränderlichen (Nr. 100 Satz IV). Eine indefinite Form kann daher nicht definit sein oder umgekehrt. Es kann aber eine Form weder definit noch indefinit sein; dies geschieht, wenn sie für Werte der Veränderlichen verschwindet, die nicht alle null sind, wenn sie aber trotzdem immer dasselbe Vorzeichen hat.

Satz I. Es sei $\psi(x, y, \cdots)$ eine definite Form n^{ten} Grades und $\omega(x, y, \cdots)$ irgend eine Form desselben Grades, alsdann *hat der Quotient* $\frac{\omega}{\psi}$ *ein endliches Maximum und ein endliches Minimum.*

In der That, $\frac{\omega(x, y, \cdots)}{\psi(x, y, \cdots)}$ ist eine homogene Funktion vom Grade null in $x, y, \cdots$; sein Wert ändert sich daher nicht, wenn alle Veränderlichen mit einer und derselben Gröfse multipliziert werden. Durch diese Multiplikation kann man aber erreichen, dafs die Veränderlichen der Gleichung genügen:

$$\varpi = x^2 + y^2 + \cdots - 1 = 0.$$

Denn würden die Veränderlichen diese Gleichung nicht erfüllen, so brauchte man nur alle mit der endlichen Gröfse $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \cdots}}$ zu multiplizieren. Also sind die Werte, welche $\frac{\psi}{\varphi}$ annimmt, wenn man den Veränderlichen alle möglichen Werte erteilt, dieselben als die Werte, welche $\frac{\psi}{\varphi}$ annimmt, wenn man den Veränderlichen nur alle Werte des Variabilitätsbereiches $\varpi = 0$ erteilt. Dieser Bereich ist begrenzt, denn jede Veränderliche ist zwischen -1 und $+1$ enthalten; es gehört aber auch jeder Grenzpunkt des Bereiches dem Bereiche selbst an; denn genügt der Gleichung $\varpi = 0$ ein Wertsystem, welches $x, y, \cdots$ beliebig nahe kommt, so genügt ihr wegen der Stetigkeit von ϖ auch das Wertsystem $(x, y, \cdots)$ selbst. Dem Bereiche gehört aber der Punkt $(0, 0, \cdots)$ nicht an, für welchen allein ψ verschwindet. Daher sind in dem ganzen Bereiche die Funktionen ω und ψ stetig und ψ nie null. Mithin ist auch ihr Quotient $\frac{\omega}{\psi}$ in dem Bereiche stetig. Nach Nr. 100 Satz VI existieren also das Maximum und das Minimum der Werte von $\frac{\omega}{\psi}$ und beide sind endlich.

Satz II. Ist $\psi(x, y, \cdots)$ *eine definite Form* n^{ten} *Grades und ist* $\omega(x, y, \cdots)$ *eine Funktion, die sich als ganze homogene Funktion* n^{ten} *Grades von* $x, y, \cdots$ *darstellen läfst, deren Koeffizienten noch von* $x, y, \cdots$ *abhängen und mit diesen Veränderlichen gegen null konvergieren, so hat auch* $\frac{\omega}{\psi}$ *an der Stelle* $(0, 0, \cdots 0)$ *den Grenzwert null.*

In der That, ω ist eine Summe von Gliedern der Form $Cx^\alpha y^\beta \cdots$, wo $\alpha + \beta + \cdots = n$ ist und C eine Funktion von $x, y, \cdots$ ist, deren Grenzwert null ist. Daher ist $\frac{\omega}{\psi}$ eine Summe von mehreren Gliedern der Form:

$$C \frac{x^\alpha y^\beta \cdots}{\psi(x, y, \cdots)}.$$

Der erste Faktor dieses Produktes hat den Grenzwert 0, der zweite ist zwischen endlichen Grenzen enthalten; denn er ist das Verhältnis einer Form n^{ten} Grades zu einer definiten Form desselben Grades. Also hat dieses Glied den Grenzwert null und es wird also auch $\lim \frac{\omega}{\psi} = 0$.

Satz III. Ist in der Taylorschen Reihe für die Funktionen von mehreren Veränderlichen das Glied, welches die Zuwüchse der Veränderlichen homogen im n^{ten} Grade enthält und das kurz das n^{te} Glied heifsen möge, eine definite Form, so erhält der Quotient des Restes vom $n + 1^{\text{ten}}$ Gliede an zu dem obigen Gliede den Grenzwert null bei verschwindenden Zuwüchsen der Veränderlichen; das Verhältnis des Restes aber vom n^{ten} Gliede an zu dem n^{ten} Gliede hat den Grenzwert Eins.

In der That, behalten wir die Bezeichnungen der Seite 147 bei und nennen R_n und R_{n+1} die Reste vom n^{ten} und $n + 1^{\text{ten}}$ Gliede an, so wird:

$$F(1) = F(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta),$$

$$F(1) = F(0) + \cdots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + R_{n+1}.$$

Man erhält daher:

$$R_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta), \quad R_{n+1} = \frac{1}{n!} [F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)]$$

oder:

$$\frac{R_{n+1}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)}.$$

Der Zähler des Bruches auf der rechten Seite ist ein homogenes Polynom n^{ten} Grades der Zuwüchse der Veränderlichen, dessen

Koeffizienten noch von diesen Zuwüchsen abhängen und die Gestalt haben

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta \ldots}(x_0 + \theta h, \; y_0 + \theta k, \cdots) - f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta \ldots}(x_0 \, y_0 \cdots).$$

Ihr Grenzwert bei verschwindenden $h, k, \cdots$ ist null und daher wird nach dem vorigen Satze

$$\frac{R_{n+1}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = \lim \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} = 0.$$

Aus

$$\lim \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} = 0$$

schliefst man ferner:

$$\lim \frac{F^{(n)}(\theta)}{F^{(n)}(0)} = 1$$

oder:

$$\lim \frac{R_n}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = 1.$$

Satz IV. Die Funktion $f(x, y, \cdots)$ verschwinde an der Stelle $(x_0, y_0, \cdots)$ und man entwickele f an dieser Stelle nach der Taylorschen Formel. Ist nun das erste Glied, das nicht identisch verschwindet, eine indefinite Form der Zuwüchse der Veränderlichen, so nimmt die Funktion in jeder Umgebung von $(x_0, y_0, \cdots)$ Werte von entgegengesetztem Vorzeichen und den Nullwert an.

In der That, nimmt man an, dafs die Funktion und ihre Ableitungen von niederer als n^{ter} Ordnung null sind, so giebt die Taylorsche Formel:

$$F(t) = f(x_0 + th, \; y_0 + tk, \cdots) = F(t) = \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(\theta t).$$

Da aber $F^{(n)}(0)$ eine indefinite Form von $h, k, \cdots$ ist, so kann man $h, k, \cdots$ Werte erteilen, für welche $F^{(n)}(0)$ positiv ist, und solche, für die es negativ ist. Nimmt man in der obigen Formel $t > 0$ an und läfst dann t gegen null konvergieren, so konvergiert $F^{(n)}(\theta t)$ gegen $F^{(n)}(0)$, also gegen einen Grenzwert, der je nach der Wahl der $h, k, \cdots$ positiv oder negativ ist. Daher ist auch $F(t)$ nach unserem Belieben positiv oder negativ; da es aber auch stetig ist, so wird es auch unendlich oft null.

Satz V. Die Funktion $f(x, y, \cdots)$ *sei an der Stelle* $(x_0, y_0, \cdots)$ *null und in der Taylorschen Entwickelung von* f *an dieser Stelle sei das erste Glied, welches nicht identisch null ist, eine definite Form der Zuwüchse der Veränderlichen. Dann ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von* $(x_0, y_0, \cdots)$, *die Stelle* $(x_0, y_0, \cdots)$ *selbst ausgenommen, die Funktion nicht null und von konstantem Zeichen.*

In der That, sind alle Ableitungen von niederer als n^{ter} Ordnung null, so reduziert sich die Taylorsche Entwickelung für $f(x_0 + h, y_0 + k, \cdots)$ auf den Rest R_n allein. Da dieser aber eine definite Form ist und daher nach Satz III das Verhältnis von R_n zum n^{ten} Gliede den Grenzwert 1 hat, so folgt, daſs auch das Verhältnis von $f(x_0 + h, y_0 + k, \cdots)$ zum n^{ten} Gliede den Grenzwert 1 hat; das heiſst, $f(x_0 + h, y_0 + k, \cdots)$ hat für hinreichend kleine $h, k, \cdots$ dasselbe Zeichen wie das n^{te} Glied.

Satz VI. Man setze:

$$f(x, y, \cdots) = f_0 + f_1 + \cdots + f_p + r_{p+1},$$
$$\varphi(x, y, \cdots) = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_q + \varrho_{q+1};$$

dabei sollen f_i *und* φ_j *homogene Funktionen von* $x - x_0, y - y_0, \cdots$ *sein, deren Grad durch ihren Index angegeben wird und die durch Anwendung der Taylorschen Formel entstehen. Es seien nun* f_m *und* φ_n *die ersten Glieder in der Entwickelung von* f *und* φ, *welche nicht identisch verschwinden und* φ_n *sei eine definite Form der Zuwüchse der Veränderlichen. Setzt man jetzt* $u = \frac{f}{\varphi}$ *und läſst* $x, y, \cdots$ *gegen* $x_0, y_0, \cdots$ *konvergieren, so wird:*

Wenn 1) $m > n$, $\lim u = 0$.

Ist dagegen 2) $m = n$, *so schwankt* u *zwischen endlichen Grenzen und konvergiert nur dann gegen einen Grenzwert* L, *wenn für beliebige Zuwüchse der Veränderlichen*

$$f_n = L\varphi_n$$

ist.

Ist 3) $m < n$, *so konvergiert* u *gegen keinen endlichen Grenzwert.*

In der That, ist $m > n$, so kann man schreiben:

$$u = \frac{r_n}{\varrho_n} = \frac{\frac{r_n}{\varphi_n}}{\frac{\varrho_n}{\varphi_n}}.$$

Läfst man die Zuwüchse der Veränderlichen gegen null konvergieren, so wird nach Satz III $\lim \frac{\varrho_n}{\varphi_n} = 1$; $\frac{r_n}{\varphi_n}$ ist ein Quotient, dessen Nenner φ_n eine definite Form n^{ten} Grades und dessen Zähler r_n eine homogene Funktion n^{ten} Grades der Zuwüchse der Veränderlichen ist und deren Koeffizienten bei verschwindenden Zuwüchsen der Veränderlichen den Grenzwert null erhalten, also ist $\lim \frac{r_n}{\varphi_n} = 0$ und mithin auch $\lim u = 0$.

Ist $m = n$, so wird:

$$u = \frac{f_n + r_{n+1}}{\varrho_n} = \frac{\frac{f_n}{\varphi_n} + \frac{r_{n+1}}{\varphi_n}}{\frac{\varrho_n}{\varphi_n}}.$$

Bei verschwindenden Zuwüchsen der Veränderlichen wird

$$\lim \frac{\varrho_n}{\varphi_n} = 1 \quad \text{und} \quad \lim \frac{r_{n+1}}{\varphi_n} = 0;$$

denn r_{n+1} ist eine homogene Funktion $n + 1^{\text{ten}}$ Grades der Zuwüchse, deren Koeffizienten von diesen noch abhängen und endlich sind. Es läfst sich also als eine homogene Funktion n^{ten} Grades auffassen, deren Koeffizienten noch homogene Funktionen ersten Grades sind, deren Grenzwert null ist. Schliefslich schwankt $\frac{f_n}{\varphi_n}$ zwischen endlichen Grenzen, dem Maximum M und dem Minimum m von $\frac{f_n}{\varphi_n}$ (Satz I). Daher schwankt auch u zwischen endlichen Grenzen, die M und m beliebig nahe kommen; es konvergiert also überhaupt gegen keinen Grenzwert, es sei denn, dafs $M = m$ wird. In diesem Falle sei L der gemeinsame Wert von M und m, dann wird identisch $\frac{f_n}{\varphi_n} = L$ oder $f_n = L\varphi_n$ und $\lim u = L$.

Ist endlich $m < n$, so setze man:

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk, \cdots) \text{ und } \Phi(t) = \varphi(x_0 + th, y_0 + tk, \cdots);$$

dann wird:

$$\frac{F(t)}{\Phi(t)} = \frac{\frac{t^m}{m!} F^{(m)}(\theta t)}{\frac{t^n}{n!} \Phi^{(n)}(\vartheta t)} = \frac{1}{t^{n-m}} \frac{n!}{m!} \frac{F^{(m)}(\theta t)}{\Phi^{(n)}(\vartheta t)}.$$

Läfst man t null werden, so konvergiert der letzte Faktor gegen den endlichen Grenzwert $\frac{F^{(m)}(0)}{\Phi^{(n)}(0)}$, der nicht null ist, sobald $h, k, \cdots$ nicht so gewählt sind, dafs der Zähler verschwindet. Also konvergiert $\frac{F(t)}{\Phi(t)}$ gegen ∞ und erhält mithin keinen endlichen Grenzwert.

§ 3. Maxima und Minima der Funktionen einer Veränderlichen.

131. Wir sagen, dafs die in einer Umgebung von x_0 gegebene Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ein *Maximum* wird, wenn man ein Intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ bestimmen kann, sodafs für jedes x in ihm

$$f(x_0) \geqq f(x)$$

wird. Wir sagen, dafs $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ein *Minimum* wird, wenn für jedes x in dem Intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$

$$f(x_0) \leqq f(x)$$

wird.

Die so definierten Maxima und Minima hängen von der Aufeinanderfolge der Funktionswerte ab, wir nennen sie auch *absolute*.

Eine Funktion kann mehrere derartige Maxima und Minima besitzen, die auch von einander verschieden sein können, sie kann Minima haben, die gröfser als Maxima sind. Sie sind zu unterscheiden von dem Maximum oder Minimum, das eine Funktion in einem gegebenen Intervalle (a, b) annimmt, und die in Nr. 21 definiert wurden. Diese nennen wir *relative* Maxima und Minima oder auch die *gröfsten* oder *kleinsten* Funktionswerte; sie hängen von dem System der Werte ab, welche die Funktion annimmt, und nicht von der Ordnung, in welcher diese Werte aufeinanderfolgen.

Besitzt die Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ eine positive Ableitung $f'(x_0)$, so wächst die Funktion an dieser Stelle (Nr. 43), und ihre Werte sind beziehungsweise kleiner oder gröfser als die von $f(x_0)$, je nachdem x kleiner oder gröfser als x_0 ist; dabei ist vorausgesetzt, dafs x hinreichend nahe an x_0 liegt. In diesem Falle hat die Funktion $f(x)$ daher für $x = x_0$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Dasselbe ereignet sich, wenn $f'(x_0)$ negativ ist; hieraus folgt:

Besitzt die Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ eine endliche und von null verschiedene Ableitung, so ist an dieser Stelle die Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum.

Schliefst man daher aus den Werten x diejenigen aus, welchen eine (bestimmte, endliche) von null verschiedene Ableitung entspricht, so bleiben diejenigen Stellen übrig, an denen die Funktion entweder keine (bezw. eine endliche oder unendliche, oder eine unendlich grofse), oder eine verschwindende Ableitung besitzt. Diese Stellen mufs man nun weiter untersuchen, um sich über die Existenz oder Nichtexistenz eines Extremwertes zu vergewissern. Wir werden keine Regeln für die Fälle geben, in denen keine endliche Ableitung existiert. Nehmen wir an, dafs die Ableitung null ist, so kann man sich der folgenden Kriterien bedienen.

Besitzt $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ in dem Intervalle $(x_0 - k,\ x_0 + k)$, so gilt die Gleichung

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_1),$$

wo x_1 zwischen x_0 und x enthalten ist.

Wird $f'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ in der Weise null, dafs es positiv ist für $x < x_0$ und negativ für $x > x_0$, so ist $(x - x_0) f'(x_1)$, wie man auch $x \neq x_0$ annehmen möge, immer negativ und daher $f(x) < f(x_0)$. Die Funktion wird also in diesem Falle ein Maximum für $x = x_0$. Ist aber umgekehrt $f'(x)$ negativ für $x < x_0$ und positiv für $x > x_0$, so ist das Produkt $(x - x_0) f'(x_1)$ immer positiv und die Funktion wird daher ein Minimum für $x = x_0$. Behält aber $f'(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ ein konstantes Zeichen, so ändert

$(x - x_0) f'(x_1)$ sein Zeichen, je nachdem $x > x_0$ oder $x < x_0$ ist und die Funktion hat weder ein Maximum noch ein Minimum. Wir sehen also:

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem ihre Ableitung in der Weise für $x = x_0$ verschwindet, dafs sie vom Positiven zum Negativen oder in der Weise, dafs sie vom Negativen zum Positiven geht. Sie hat weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn die Ableitung ihr Zeichen nicht ändert.

Anstatt das Vorzeichen der Ableitung in der Umgebung von x_0 zu betrachten, kann man das Vorzeichen der zweiten Ableitung für $x = x_0$ betrachten und es gilt die Regel:

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$, für die $f'(x_0) = 0$ ist, ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f''(x_0)$ negativ oder positiv ist.

In der That, ist $f''(x_0) < 0$, so nimmt $f'(x)$ ab und, da es für $x = x_0$ null wird, so geht es vom Positiven zum Negativen; das Umgekehrte ist der Fall, wenn $f''(x_0) > 0$ ist.

Diese Regel läfst uns im Stich, wenn $f''(x_0) = 0$ ist. Nimmt man allgemein an, dafs:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

ist, so giebt die Taylorsche Formel:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_1),$$

wo x_1 zwischen x_0 und x enthalten ist. Nimmt man zur Vereinfachung der Schlufsweise an, dafs $f^{(n)}(x)$ stetig ist, so behält es in der Umgebung von x_0 ein konstantes Zeichen. Ist n ungerade, so ändert der Faktor $(x - x_0)^n$ sein Zeichen, je nachdem $x > x_0$ oder $x < x_0$ ist. Also ändert auch $f(x) - f(x_0)$ sein Zeichen und $f(x_0)$ ist weder ein Maximum noch ein Minimum. Ist n gerade, so ist der Faktor $(x - x_0)^n$ positiv und $f(x) - f(x_0)$ hat konstant das Zeichen von $f^{(n)}(x_0)$. Daher ist $f(x_0)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f^{(n)}(x_0)$ negativ oder positiv ist. Also gilt:

Wenn für $x = x_0$ die erste und einige der folgenden Ableitungen verschwinden, so ist $f(x_0)$ ein Extremwert oder nicht, je nachdem die erste nicht verschwindende Ableitung von gerader *oder ungerader Ordnung ist. Ist jenes der Fall, so ist der Extremwert ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem die fragliche Ableitung negativ oder positiv ist.*

132. Ist die Funktion $f(x)$ stetig in dem endlichen Intervalle (a, b), so existieren der gröfste und kleinste Wert der Funktion in dem fraglichen Intervalle. Der eine sowohl als der andere kann einem Endpunkte des Intervalles (a, b) entsprechen oder einem Punkte in seinem Inneren. In letzterem Falle sind die relativen Maxima und Minima der Funktion auch absolute. Daher entsprechen die gröfsten und kleinsten Werte entweder den Enden des Intervalles oder denjenigen Werten von x, welche die Funktion zu einem absoluten Maximum oder Minimum machen. Wenn das Intervall, in welchem x variiert, unendlich grofs ist $[(a, \infty)$ oder $(-\infty, b)$ oder $(-\infty, +\infty)]$, so braucht die Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum zu besitzen, sie kann ebenso eine obere und eine untere Grenze besitzen oder nicht.

Beispiele. — 1) Eine Zahl in zwei Summanden zu zerlegen, sodafs ihr Produkt ein Maximum wird.

Es sei a die gegebene Zahl, x und $a - x$ die beiden Summanden und $y = x(a - x)$ ihr Produkt; betrachten wir x als Veränderliche, so wird

$$y' = a - 2x$$

null für $x = \frac{a}{2}\cdot$ Ferner wird $y'' = -2$, also hat die Funktion ein absolutes Maximum für $x = \frac{a}{2}$; d. h., wenn die beiden Teile einander gleich werden und es wird $y = \frac{a^2}{4}\cdot$ Dies ist der gröfste Wert, den y annimmt; denn die Ableitung y' ist positiv für $x < \frac{a}{2}$ und negativ für $x > \frac{a}{2}$; die Funktion nimmt also zu in dem Intervalle $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ und sie nimmt ab im Intervalle $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)\cdot$

Die Funktion besitzt weder eine obere noch eine untere Grenze.

2) $$y = x^x, \quad x > 0.$$

Durch Differentiation erhält man:

$$y' = x^x(1 + \log x).$$

Der erste Faktor wird nie null und ist immer positiv; der zweite wird null, wenn $\log x = -1$ oder $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ ist, er geht dabei vom Negativen $\left(\text{für } x < \frac{1}{e}\right)$ zum Positiven $\left(x > \frac{1}{e}\right)$ über. Also hat die Funktion ein absolutes Minimum für $x = \frac{1}{e} = 0{,}36788\cdots$ und dieses ist $y = 0{,}676411\cdots$. Dies ist zugleich der kleinste Wert, den die Funktion im Intervalle $(0, \infty)$ annimmt. Die Funktion hat weder ein Maximum noch eine obere Grenze.

3) $$y = x^{\frac{2}{3}}, \quad y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

Die Ableitung ist für keinen Wert von x null, aber ist unendlich für $x = 0$. Für diesen Wert wird $y = 0$; sie wird dort thatsächlich ein Minimum, sowohl ein absolutes, als ein relatives in Bezug auf das Intervall $(-\infty, +\infty)$; denn giebt man x irgend einen anderen Wert, so ist die Funktion immer gröſser als null. Die Funktion hat weder ein Maximum noch eine obere Grenze.

§ 4. Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

133. Man sagt, daſs $u = f(x, y, z, \cdots)$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \cdots)$ ein Maximum oder Minimum wird, wenn für einen hinlänglich kleinen Bereich um $(x_0, y_0, z_0, \cdots)$ immer

$$f(x_0, y_0, z_0, \cdots) \geqq f(x, y, z, \cdots)$$

bezw.

$$f(x_0, y_0, z_0, \cdots) \leqq f(x, y, z, \cdots)$$

wird.

Man betrachte die Funktion von x allein

$$f(x, y_0, z_0, \cdots).$$

Wird u ein Maximum oder Minimum für $x = x_0$, $y = y_0, \cdots$, so wird $f(x, y_0, z_0, \cdots)$ ein solches für $x = x_0$. Also ist die Ableitung $f_x'(x_0, y_0, z_0, \cdots)$, wenn sie überhaupt einen bestimmten endlichen Wert hat, null. In ähnlicher Weise kann man für die anderen Veränderlichen schlieſsen; daraus folgt:

Wenn $u = f(x, y, z, \cdots)$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \cdots)$ ein Maximum oder Minimum hat, so sind an dieser Stelle die ersten partiellen Ableitungen von u, falls sie überhaupt bestimmte endliche Werte haben, gleich null.

134. Man setze:

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \cdots$$

und

$$F(t) = f(x, y, z, \cdots).$$

Wird u ein Maximum oder Minimum an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \cdots)$, so gilt Gleiches für $F(t)$ an der Stelle $t = 0$.

Sind jetzt die ersten Ableitungen von $f(x, y, z, \cdots)$ stetig, so hat $F(t)$ eine endliche Ableitung:

$$F'(t) = f_x'(x, y, z, \cdots) h + f_y'(x, y, z, \cdots) k + f_z'(x, y, z, \cdots) l + \cdots$$

und daher mufs sein:

$$F'(0) = f_x'(x_0, y_0, z_0, \cdots) h + f_y'(x_0, y_0, z_0, \cdots) k + \cdots = 0,$$

welches auch die Werte von $h, k, \cdots$ sein mögen. Hierzu ist notwendig, dafs:

$$f_x'(x_0, y_0, \cdots) = 0, \quad f_y'(x_0, y_0, \cdots) = 0, \cdots$$

ist, wie bereits gefunden wurde.

Nimmt man jetzt an, dafs auch die zweiten Ableitungen von f stetig sind, so wird:

$$F''(t) = f_{xx}''(x, y, \cdots) h^2 + f_{yy}''(x, y, \cdots) k^2 + \cdots \\ + 2 f_{xy}''(x, y, \cdots) hk + \cdots.$$

Wird nun u ein Maximum oder ein Minimum für die betrachtete Stelle, so gilt das Gleiche von $F(t)$ für $t = 0$, daher mufs für das Maximum

$$F''(0) \leqq 0$$

sein und für das Minimum

$$F''(0) \geqq 0,$$

welches auch die Werte von $h, k \cdots$ sein mögen. Wir erkennen:

Damit die Funktion u an der Stelle $(x_0, y_0, \cdots)$, für welche die ersten Ableitungen verschwinden und die zweiten stetig sind, *ein Maximum oder ein Minimum werden kann, ist notwendig, dafs die quadratische Form von $h, k, \cdots$*

$$F''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0, \cdots) h^2 + f''_{yy}(x_0, y_0, \cdots) k^2 + \cdots$$
$$+ 2 f''_{xy}(x_0, y_0, \cdots) hk + \cdots$$

keine positiven bezw. negativen Werte annimmt, welches auch die Veränderlichen $h, k, \cdots$ sein mögen.

135. *Wenn für $x = x_0$, $y = y_0, \cdots$ alle Ableitungen von niederer als n^{ter} Ordnung der Funktion $u = f(x, y, z, \cdots)$ verschwinden und wenn in der Taylorschen Entwickelung für $f(x_0 + h, y_0 + k, \cdots)$ das Glied, welches eine homogene Funktion n^{ten} Grades der $h, k, \cdots$ ist, eine indefinite Form ist, so hat u an der Stelle $(x_0, y_0, \cdots)$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Ist hingegen jenes Glied eine positive definite Form, so ist u ein Minimum, ist es eine negative definite Form, so ist es ein Maximum.*

In der That, wendet man die Sätze IV und V der Nr. 130 auf die Funktion

$$v = f(x, y, z, \cdots) - f(x_0, y_0, z_0, \cdots)$$

an, so nimmt diese, falls das betrachtete Glied eine indefinite Form ist, in jeder Umgebung von $(x_0, y_0, \cdots)$ sowohl positive als negative Werte an und daher nimmt $f(x, y, \cdots)$ sowohl Werte an, die gröfser sind als $f(x_0, y_0, \cdots)$, als auch solche, die kleiner sind als $f(x_0, y_0, \cdots)$; u wird also dann weder ein Maximum noch ein Minimum. Ist dagegen das fragliche Glied eine positive definite Form, so wird in einer bestimmten Umgebung von $(x_0, y_0, \cdots)$, $v > 0$ oder:

$$f(x, y, \cdots) > f(x_0, y_0, \cdots);$$

es wird also dann u ein Minimum für $x = x_0$, $y = y_0, \cdots$. In ähnlicher Weise würde man schliefsen, wenn das fragliche Glied eine negative definite Form wäre.

136. Wir geben jetzt ein Kriterium um zu entscheiden, ob eine gegebene quadratische Form $\psi(h, k, l, \cdots)$ eine positive, definite quadratische Form ist; das heifst, ob ψ, welches auch die Werte $h, k, l, \cdots$ sein mögen, nur positive Werte annimmt, die von null verschieden sind, wenn nicht gleichzeitig alle $h, k, l, \cdots$ null sind.

Hängt ψ nur von der einen Veränderlichen h ab, so wird $\psi = Ah^2$ und dies ist positiv und nur mit h null, sobald $A > 0$.

Hängt ψ von zwei Veränderlichen h und k ab, so wird:

$$\psi = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Ist dies eine definite positive Form, so wird für $k = 0$, $h \neq 0$, $\psi = Ah^2$. Da dies positiv sein mufs, so folgt:

$$A > 0.$$

Man kann ψ auf die Form bringen:

$$\psi = \frac{1}{A}[(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2].$$

Verfügt man über h und k so, dafs $Ah + Bk = 0$ wird, so nimmt ψ den positiven von null verschiedenen Wert

$$\frac{1}{A}(AC - B^2)k^2$$

an. Es ist also auch

$$AC - B^2 > 0.$$

Die Bedingungen $A > 0$ und $AC - B^2 > 0$ sind nicht nur notwendig, damit ψ eine definite positive quadratische Form wird, sie sind auch hinreichend. In der That, ist $k \neq 0$, so wird:

$$(AC - B^2)k^2 > 0 \quad \text{und} \quad (Ah + Bk)^2 \geqq 0$$

und daher wird auch die Summe beider Ausdrücke und mit ihr ψ positiv; ist aber $k = 0$, so ist $h \neq 0$ und dann wird $\psi = Ah^2$ ebenfalls positiv.

Hängt ψ allgemein von mehreren Veränderlichen $h, k, l, \cdots$ ab, so kann man schreiben:

$$\psi = Ah^2 + 2Bh + C,$$

indem man unter A eine Konstante, unter B eine Form ersten Grades von $k, l, \cdots$ und unter C eine quadratische Form derselben Zahlen versteht. Sind alle $k, l, \cdots$ null, aber $h \neq 0$, so werden B und C null und es folgt $\psi = Ah^2$. Also mufs

$$A > 0$$

sein.

Die Form läfst sich jetzt schreiben:

$$\psi = \frac{1}{A}[(Ah + B)^2 + (AC - B^2)],$$

und es wird $AC - B^2$ eine quadratische Form von $k, l, \cdots$. Erteilt man den Veränderlichen Werte, die nicht sämtlich null sind, und bestimmt h aus $Ah + B = 0$, so wird

$$\psi = \frac{1}{A}(AC - B^2)$$

positiv und von null verschieden. Also mufs der Ausdruck $AC - B^2$ positiv und von null verschieden sein. Setzt man daher $\psi_1(k, l, \cdots) = AC - B^2$, so wird ψ_1 eine quadratische Form von $k, l, \cdots$, die immer positiv und von null verschieden ist, aufser wenn alle Veränderlichen null sind.

Also sind die notwendigen Bedingungen, damit ψ eine definite positive Form ist: 1) $A > 0$, 2) $AC - B^2$ eine positive definite Form der Veränderlichen $k, l, \cdots$.

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend; denn erteilt man h einen willkürlichen Wert und $k, l, \cdots$ willkürliche Werte, die nicht alle null sind, so ist von den zwei Summanden, in welche ψ zerlegt ist, der erste positiv oder null und der zweite positiv; also wird $\psi > 0$. Erteilt man andererseits den $k, l, \cdots$ sämtlich den Wert null, so wird $h \neq 0$ und $\psi = Ah^2$ positiv.

In dieser Weise ist die Entscheidung der Frage, ob eine quadratische Form definit und positiv ist, auf die Entscheidung derselben Frage bei einer anderen quadratischen Form zurückgeführt, die eine Veränderliche weniger enthält. Fährt man so fort, so kommt man auf die bereits untersuchten Fälle mit einer oder zwei Veränderlichen.

Man untersucht, ob eine quadratische Form definit und negativ ist, indem man untersucht, ob $-\psi$ definit und positiv ist.

§ 5. Beispiele.

137. Häufig fragt man nach dem relativen Maximum oder Minimum einer Funktion, d. h. nach dem gröfsten oder kleinsten Werte, den sie annimmt, wenn die Veränderlichen in

einem gegebenen endlichen oder unendlichen Bereiche variieren. Entspricht dies einem Wertsysteme innerhalb des gegebenen Bereiches, so wird für dieses auch in dem früher definierten Sinne die Funktion ein Maximum oder ein Minimum, also ein absolutes Maximum oder Minimum.

Wir wollen z. B. eine positive Zahl in p positive Summanden zerlegen, sodafs das Produkt aus der α^{ten} Potenz des ersten, der β^{ten} des zweiten, u. s. w. schliefslich der μ^{ten} Potenz des letzten Summanden ein Maximum wird. Dabei sollen $\alpha, \beta, \cdots \mu$ positive Zahlen sein.

Nennt man $x, y, \cdots u,\ a - x - y - \cdots - u$ die fraglichen Summanden und setzt

$$U = x^\alpha y^\beta z^\gamma \cdots u^\lambda (a - x - y - \cdots - u)^\mu,$$

so handelt es sich darum, U oder, was dasselbe sagt, seinen natürlichen Logarithmus zu einem Maximum zu machen. Setzt man daher die partiellen Ableitungen von $\log U$ gleich null, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log U}{\partial x} &= \frac{\alpha}{x} - \frac{\mu}{a - x - y - \cdots - u} = 0,\\
\frac{\partial \log U}{\partial y} &= \frac{\beta}{y} - \frac{\mu}{a - x - y - \cdots - u} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial \log U}{\partial u} &= \frac{\lambda}{u} - \frac{\mu}{a - x - y - \cdots - u} = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich schreiben:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \cdots = \frac{u}{\lambda} = \frac{a - x - y - \cdots - u}{\mu} = \frac{a}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu};$$

dabei ergiebt sich das letzte Glied durch Addition der vorhergehenden Proportionen. Nennt man daher $x_0, y_0, \cdots u_0$ die Werte der Veränderlichen, welche diesen Gleichungen genügen, so erhält man

$$x_0 = a\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu},\quad y_0 = a\frac{\beta}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu},\ \cdots$$
$$u_0 = a\frac{\lambda}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu}$$

und

$$a - x_0 - y_0 - \cdots - u_0 = a\frac{\mu}{\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu}.$$

Der zugehörige Wert von U wird:

$$U_0 = a^{\alpha+\beta+\cdots+\mu}\,\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta\cdots\lambda^\lambda\mu^\mu}{(\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\mu)^{\alpha+\beta+\cdots+\mu}}.$$

Um zu erkennen, dafs U_0 der gröfste der Werte U ist, könnte man zeigen, dafs U thatsächlich ein Maximum für das soeben berechnete Wertsystem der Veränderlichen $x_0, y_0, \cdots$ wird, dafs diese Stelle im Inneren des betrachteten Variabilitätsbereiches liegt und dafs für sie die Ableitungen von $\log U$ verschwinden müssen. Da aber diese Ableitungen nur für die vorstehend gefundenen Werte verschwinden, so sind diese die Werte, welche U zu einem Maximum machen.

Man kann auch auf die Taylorsche Formel zurückgehen; ist $x, y, \cdots u$ ein anderes System von positiven Werten der Veränderlichen, für welches auch $a - x - y - \cdots - u$ positiv ist, so sind auch die Werte

$$x_0 + t(x - x_0), \quad y_0 + t(y - y_0), \cdots u_0 + t(u - u_0),$$

wo $0 < t < 1$ ist, von derselben Beschaffenheit. Also sind die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\log U$ stetig für alle diese Wertsysteme $x, y, \cdots u$ und man erhält, wenn man beachtet, dafs die ersten Ableitungen an der Stelle $x_0, y_0, \cdots$ verschwinden:

$$\log U = \log U_0 - \frac{1}{2}\Big[\frac{\alpha(x-x_0)^2}{x_1^2} + \frac{\beta(y-y_0)^2}{y_1^2} + \cdots + \frac{\lambda(u-u_0)^2}{u_1^2} + \\ + \frac{\mu(x+y+\cdots+u-x_0-y_0-\cdots-u_0)^2}{(a-x_1-y_1-\cdots-u_1)^2}\Big].$$

Dabei sind $x_1, y_1, \cdots u_1$ Werte der Veränderlichen von der Form:

$$x_0 + \theta(x - x_0), \quad y_0 + \theta(y - y_0), \cdots u_0 + \theta(u - u_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist positiv und von null verschieden, da vorausgesetzt ist, dafs das Wertsystem $x, y, \cdots u$ mit dem System $x_0, y_0, \cdots u_0$ nicht zusammenfällt. Also wird:

$$\log U < \log U_0$$
$$U < U_0$$

und es ist U_0 thatsächlich der gröfste Wert, den U annehmen kann.

Man beachte, daſs U einen kleinsten Wert nämlich null annimmt, wenn einer der Summanden verschwindet, in die a zerlegt ist. Würde man diesen Summanden auch negative Werte geben, so könnte es sich ereignen, daſs U_0 nicht mehr der gröſste der Werte von U wäre.

138. Wir fragen nach den Maximis und Minimis der Funktion

$$u = F(x, y, z),$$

wenn die Veränderlichen durch die Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0$$

mit einander verbunden sind.

Berechnet man aus der letzten Gleichung z als Funktion von x und y und setzt diesen Wert in die erste Gleichung ein, so wird u eine Funktion der Veränderlichen x und y und die Werte x, y, welche u zu einem Maximum oder Minimum machen, annullieren das totale Differential du für alle Werte dx und dy. Man hat nun:

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz,$$

wobei dz das Differential von z bedeutet, das durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

definiert ist.

Addiert man zu der Gleichung $du = 0$ die zuletzt hingeschriebene, nachdem man sie mit der unbestimmten Zahl $-\lambda$ multipliziert hat, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) dz = 0.$$

Verfügt man nun in dieser Gleichung über λ der Art, daſs der Koeffizient von dz verschwindet, so müssen dem Maximum oder Minimum entsprechend auch die Koeffizienten von dx und dy null sein und man erhält die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Diese sind symmetrisch in Bezug auf alle Veränderliche und werden erhalten, wenn man die drei partiellen Ableitungen von

$$F - \lambda f$$

bildet, indem man λ als konstant ansieht, und diese Ausdrücke dann null setzt.

Die drei Gleichungen bestimmen im Verein mit den beiden $f=0$ und $u=F$ die Unbekannten λ, x, y, z, u, welche den Werten u entsprechen, für die ein Maximum oder Minimum eintreten kann.

In ähnlicher Weise könnte man bei einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen und Bedingungsgleichungen $f=0$ schliefsen.

§ 6. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

139. Es sei ein System von Veränderlichen gegeben, die durch passende Relationen mit einander verbunden sind. Betrachtet man eine Reihe von diesen Veränderlichen als unabhängig, so werden die übrig bleibenden Funktionen von ihnen; wir werden die gewöhnlichen oder partiellen Ableitungen der verschiedenen Ordnungen von diesen in Bezug auf jene betrachten. Nimmt man eine andere Reihe von unabhängigen Veränderlichen, so betrachtet man in ähnlicher Weise die Ableitungen der übrigen Veränderlichen. Die Aufgabe der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen besteht darin, die Relationen zu finden, welche die unter der zweiten Annahme gebildeten Ableitungen in die unter der ersten Annahme gebildeten überführen.

Der einfachste Fall ist der, wo $y=f(x)$ und $x=\varphi(t)$ ist. Dann wird y eine Funktion von t und die Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots$ von y als Funktion von x betrachtet lassen sich durch die Ableitungen von y als Funktion von t und von x als Funktion von t ausdrücken, wie wir jetzt sehen werden.

Die Differentiationsregel für zusammengesetzte Funktionen liefert

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\varphi'(t)=f'(x)\frac{dx}{dt},$$

also wird

$$f'(x)=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Dies können wir einfacher schreiben:

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx},$$

indem wir auf der linken Seite $\frac{dy}{dx}$ als Ableitung von y nach x, also als $f'(x)$ auffassen, das Glied $\frac{dy}{dx}$ auf der rechten Seite aber als Quotienten der Differentiale von y und x als Funktionen von t deuten.

Differentiieren wir beide Seiten der vorstehenden Gleichung nach t und dividieren durch dx, so erhalten wir:

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Eine erneute Differentiation ergiebt nach Division durch dx:

$$(3)\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dx(dx\,d^3y-dy\,d^3x)-3d^2x(dx\,d^2y-dy\,d^2x)}{dx^5}.$$

Fährt man so fort, so erhält man die Formeln, welche die Ableitungen von y nach x als Funktion der Differentiale und also auch der Ableitungen von x und y nach t ausdrücken.

Man kann die vorstehenden Formeln dadurch verifizieren, dafs man $t=x$ setzt, sodafs die neue Veränderliche von der alten nicht verschieden ist. Alsdann ist dx konstant und daher $d^2x=d^3x=\cdots=0$. Indem man dies berücksichtigt, reduzieren sich die vorstehenden Formeln auf Identitäten.

Setzt man $t=y$ und betrachtet also y als unabhängige Veränderliche, so braucht man in den vorstehenden Formeln nur $d^2y=d^3y=\cdots=0$ zu setzen. Diese reduzieren sich dann auf:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{dy\,d^2x}{dx^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-dx\,dy\,d^3x+3dy\,d^2x^2}{dx^5},\ \cdots.$$

Setzt man die Ableitungen von x nach y in Evidenz, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},\ \cdots.$$

Beispiel. Den Ausdruck:

$$V=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

in welchem x die unabhängige Veränderliche und y Funktion von x ist, in einen anderen zu transformieren, in welchem t die unabhängige Veränderliche ist und x und y Funktionen von t sind.

Durch Anwendung der vorigen Formeln erhält man:

$$V = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Es sei y wieder Funktion von x und es seien t und u zwei neue Veränderliche, die an die vorigen durch Relationen gebunden sind, die wir in die Form setzen:

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \psi(t, u).$$

Wir wollen die Ableitungen von y nach x als Funktion der Ableitungen nach t und u ausdrücken.

Zu diesem Zwecke braucht man nur die Ableitungen von y nach x als Funktion der Ableitungen von y und x nach t auszudrücken. Diese kann man aus den Relationen berechnen, die x, y, t und u verbinden; man erhält daher durch Differentiation, wenn t die neue unabhängige Veränderliche ist:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \psi}{\partial u}\,du,$$

$$d^2x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,dt^2 + 2\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial u}\,dt\,du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,du^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,d^2u, \quad \text{u. s. w.}$$

Beispiel. Man will den Ausdruck V des vorigen Beispieles in einen anderen verwandeln, in dem die Veränderlichen r und α sind, die an x und y durch die Relationen gebunden sind:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha,$$

wo α die unabhängige Veränderliche ist.

Transformiert man den Ausdruck von V, sodafs α die unabhängige Veränderliche wird, so findet man:

$$V = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Durch Differentiation der gegebenen Relationen erhält man:

$$dx = \cos\alpha dr - r\sin\alpha d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha dr + r\cos\alpha d\alpha,$$

also

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2.$$

Ferner wird

$$d^2x = \cos\alpha d^2r - 2\sin\alpha dr d\alpha - r\cos\alpha d\alpha^2,$$
$$d^2y = \sin\alpha d^2r + 2\cos\alpha dr d\alpha - r\sin\alpha d\alpha^2$$

und daher

$$dxd^2y - dyd^2x = -rd^2rd\alpha + 2dr^2d\alpha + r^2d\alpha^3$$

oder endlich:

$$V = \frac{(dr^2 + r^2d\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{-rd^2rd\alpha + 2dr^2d\alpha + r^2d\alpha^3}.$$

140. Es sei z eine Funktion von x und y; man setzt für x und y zwei neue Veränderliche t und u, die an sie durch bekannte Relationen gebunden sind, die x und y durch t und u und umgekehrt auszudrücken gestatten. Man will die partiellen Ableitungen von z nach x und y durch die partiellen Ableitungen von z nach t und u ausdrücken.

Die Differentiationsregel für die zusammengesetzten Funktionen ergiebt, wenn man z als Funktion von t und u und diese als Funktionen von x und y betrachtet:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen drücken sofort die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ durch $\frac{\partial z}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial u}$ aus. Die Koeffizienten $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, $\cdots$ erhält man aus den Relationen, welche für x, y, t, u gegeben sind.

Differentiiert man die vorstehenden Gleichungen von Neuem, so findet man andere Gleichungen, die $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ bestimmen, u. s. w.

Beispiel. Es sei z eine Funktion von x und y, welche der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

An Stelle von x und y sollen die unabhängigen Variabelen t und u eingeführt werden, welche mit jenen durch die Gleichungen verbunden sind:

$$t = x + ay, \quad u = x - ay.$$

Man findet aus ihnen:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -a.$$

Differentiiert man z nach x und y, wie oben beschrieben ist, so erhält man in unserem Falle:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die gegebene Gleichung, so erhält man nach Division durch $-4a^2$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} = 0.$$

In ähnlicher Weise behandelt man die Fälle, in denen die Zahl der Veränderlichen gröſser ist.

Sechstes Kapitel.

Komplexe Veränderliche.

§ 1. Grenzwerte.

141. Die Regeln der Infinitesimalrechnung lassen sich auf die Zahlen übertragen, die man in der Algebra imaginär oder komplex nennt und die sich auf die Form

$$a + bi$$

bringen lassen, wo a und b reelle Zahlen bedeuten und i die imaginäre Einheit ist, sodaſs $i^2 = -1$ wird.

Die Zahlen $z = x + yi$ nennen wir *Veränderliche*, wenn x und y reelle Veränderliche sind. Wir sagen, daſs z gegen einen *Grenzwert* $c = a + bi$ konvergiert, wenn

$$\lim x = a \quad \text{und} \quad \lim y = b$$

ist. Die Differenz $z - c = (x - a) + (y - b)i$ hat zum absoluten Betrage die positiv genommene Quadratwurzel:

$$|z - c| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Ist $\lim z = c$, so hat dieser absolute Betrag den Grenzwert null. Ist umgekehrt:

$$\lim |z - c| = 0,$$

so haben auch die Gröſsen $x - a$ und $y - b$ den Grenzwert null; denn sie sind absolut kleiner als $|z - c|$ und daher wird auch $\lim z = c$.

Wir nehmen die Sätze (Nr. 10—12) über den Grenzwert einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten auch für komplexe Veränderliche als bewiesen an, da der Beweis leicht auf reelle Veränderliche zurückgeführt werden kann.

§ 2. Reihen mit komplexen Gliedern.

142. Die Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \cdots,$$

deren Glieder komplex sind, heifst *konvergent*, wenn die Summe

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1}$$

mit unbegrenzt wachsendem n gegen einen endlichen Grenzwert, welcher die Summe der Reihe genannt wird, konvergiert.

Setzt man:

$$u_0 = p_0 + q_0 i, \quad u_1 = p_1 + q_1 i, \cdots,$$

wo die p und q reell sind, so hat man:

$$s_n = (p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}) + (q_0 + q_1 + \cdots + q_{n-1})\, i.$$

Damit die Reihe konvergiert, also s_n gegen einen Grenzwert $P + Qi$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, dafs die Reihen der p und q konvergieren, dafs also:

$$P = p_0 + p_1 + \cdots,$$
$$Q = q_0 + q_1 + \cdots,$$

ist.

143. Man betrachte z. B. die geometrische Progression:

$$1, x, x^2, \cdots;$$

man hat hier:

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Ist der Betrag von x kleiner als 1, so hat der Betrag von x^n bei unbegrenzt wachsendem n den Grenzwert null; daher konvergiert die vorgelegte Reihe und es ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Setzt man $x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so wird

$$\frac{1}{1-r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = 1 + r(\cos\alpha + i\sin\alpha) + r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \\ + r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + \cdots.$$

Die linke Seite wird aber:

$$\frac{1}{1-r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{1 - r\cos\alpha + ri\sin\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}.$$

Setzt man also die reellen Teile und die Koeffizienten von i

einander gleich, so erhält man die für alle positiven echten Brüche r und alle reellen Werte von α gültigen Formeln:

$$\frac{1 - r\cos\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = 1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \cdots,$$

$$\frac{r\sin\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = r\sin\alpha + r^2\sin 2\alpha + \cdots.$$

144. *Satz. Das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe erhält den Grenzwert null, wenn sein Index unbegrenzt wächst.*

In der That, setzt man $u_n = p_n + q_n i$, und konvergiert die Reihe der u_n, so konvergieren die reellen Reihen, deren allgemeine Glieder p_n und q_n sind, also wird (Nr. 55) $\lim p_n = 0$, $\lim q_n = 0$ und daher auch $\lim u_n = 0$.

Wir nehmen die Sätze (Nr. 52 und 53) als bewiesen an, die sich auf die Multiplikation einer Reihe mit einer Konstanten und auf die Summe zweier Reihen beziehen.

Satz. Eine Reihe mit komplexen Gliedern konvergiert, wenn die Reihe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder konvergiert.

Es seien

$$u_0, u_1, u_2, \cdots$$

die Glieder der gegebenen Reihe und

$$r_0, r_1, r_2, \cdots$$

ihre absoluten Beträge, von denen wir voraussetzen, dafs sie eine konvergente Reihe bilden;

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$$

seien die Argumente der einzelnen Glieder. Dann ist:

$$u_n = r_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n).$$

Daher sind die aus den reellen Teilen und aus den Koeffizienten von i gebildeten Reihen

$$r_0\cos\alpha_0, \quad r_1\cos\alpha_1, \quad r_2\cos\alpha_2, \cdots$$

und

$$r_0\sin\alpha_0, \quad r_1\sin\alpha_1, \quad r_2\sin\alpha_2, \cdots.$$

Ihre Glieder sind beziehungsweise absolut kleiner als die Glieder der konvergenten Reihe

$$r_0, r_1, r_2, \cdots.$$

Also konvergieren auch jene Reihen, also auch die Reihe der u.

So ist z. B. die Reihe

$$1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \cdots$$

konvergent für jeden reellen oder komplexen Wert von x; denn ist r der absolute Betrag von x, so ist die Reihe

$$1, \quad \frac{r}{1!}, \quad \frac{r^2}{2!}, \quad \frac{r^3}{3!}, \cdots$$

konvergent und hat zur Summe e^r.

145. *Satz. Wenn die Reihen:*

(1) $$u_0, u_1, u_2, \cdots$$

und

(2) $$v_0, v_1, v_2, \cdots$$

konvergieren, und wenn auch die Reihen ihrer absoluten Beträge

(3) $$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

und

(4) $$b_0, b_1, b_2, \cdots$$

konvergieren, so konvergiert auch die Reihe

(5) $$w_0, w_1, w_2, \cdots,$$

in der

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \quad w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \cdots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0, \cdots$$

ist und ihre Summe ist gleich dem Produkte der Summen der beiden gegebenen Reihen.

Wir beweisen den Satz zunächst für die Reihen (3) und (4), die aus den Beträgen der einzelnen Glieder gebildet und daher Reihen mit lauter positiven Glieder sind.

Setzt man

$$A_p = a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1},$$
$$B_p = b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1},$$

und

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_0),$$

so erkennt man leicht, dafs das Produkt

$$\begin{aligned} A_pB_p = a_0b_0 & + a_1b_0 + \cdots + a_{p-1}b_0 \\ + a_0b_1 & + a_1b_1 + \cdots + a_{p-1}b_1 \\ + \cdot\ \cdot & \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + a_0b_{p-1} & + a_1b_{p-1} + \cdots + a_{p-1}b_{p-1} \end{aligned}$$

den Wert hat:

$$A_pB_p = C_p + a_1b_{p-1} + \cdots + a_{p-1}b_1 + \cdots + a_{p-1}b_{p-1}.$$

Es ist also:

$$A_pB_p > C_p$$

und

$$A_pB_p < C_{2p} < C_{2p+1}.$$

Setzt man in der ersten Ungleichung $p = n$, so wird

$$C_n < A_nB_n.$$

Setzt man in der zweiten Ungleichung $n = 2p$ oder $2p + 1$, sodafs p die ganze gröfste Zahl ist, die in $\frac{n}{2}$ enthalten ist, so wird:

$$C_n > A_pB_p.$$

Mit unbegrenzt wachsendem n wächst auch p unbegrenzt; nennt man daher A und B die Summen der Reihen (3) und (4), so wird:

$$\lim A_n = \lim A_p = A, \quad \lim B_n = \lim B_p = B.$$

Also ist C_n zwischen zwei Zahlen enthalten, die gegen denselben Grenzwert konvergieren und daher wird auch

$$\lim C_n = AB.$$

Jetzt wollen wir die komplexen Reihen (1) und (2) betrachten; setzt man:

$$\begin{aligned} s_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \\ s_n' &= v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}, \\ s_n'' &= w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}, \end{aligned}$$

so wird

$$s_n s_n' - s_n'' = u_1v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_1 + \cdots + u_{n-1}v_{n-1}.$$

Bildet man daher auf beiden Seiten den absoluten Betrag und bedenkt, dafs der absolute Betrag einer Summe nicht gröfser ist als die Summe der absoluten Beträge, so wird:

$$| s_n s_n' - s_n'' | \leqq a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}$$

oder

$$| s_n s_n' - s_n'' | \leqq (A_n B_n - C_n).$$

Bei unbegrenzt wachsendem n wird $\lim (A_n B_n - C_n) = 0$, also auch $\lim | s_n s_n' - s_n'' | = 0$ und mithin

$$\lim s_n'' = \lim s_n \cdot \lim s_n'.$$

§ 3. Exponential- und Kreisfunktionen einer komplexen Veränderlichen.

146. Als Definition von e^x für komplexes x dient uns die Gleichung:

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wo die Reihe auf der rechten Seite für jedes x konvergiert und für reelles x unser früheres e^x liefert.

Analog setzen wir bei komplexem x die Gleichungen an:

$$(2) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$(3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Auch diese Reihen konvergieren für jedes x und fallen bei reellem x mit unserem früheren $\sin x$ und $\cos x$ zusammen.

Setzt man in (1) ix für x, so wird:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

also wegen der Formeln (2) und (3):

$$(4) \qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Vertauscht man x mit $-x$, so wird:

$$(5) \qquad e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Aus diesen letzten Formeln erhält man:

$$(6) \qquad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

und bekommt mithin die Kreisfunktionen ausgedrückt durch die Exponentialfunktion.

147. Die Eigenschaft:

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

besteht auch für komplexe x und y. In der That, man hat:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots.$$

Multipliziert man beide Reihen nach der bekannten Regel, die man anwenden darf, da auch die aus den absoluten Beträgen beider Reihen gebildeten Reihen konvergieren, so erhält man:

$$e^x e^y = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \cdots$$

und das allgemeine Glied ist:

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \frac{y^r}{r!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[x^n + nx^{n-1}y + \cdots + \frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} y^r + \cdots + y^n\right] = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Also wird

$$e^x e^y = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \cdots.$$

Da aber die Reihe rechter Hand nach Definition die Summe e^{x+y} hat, so erhält man die zu beweisende Formel.

In Folge dieses Satzes hat man:

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Setzt man x und y als reell voraus, so ist $x + yi$ irgend eine komplexe Zahl und e^{x+yi} in trigonometrischer Form ausgedrückt; es hat zum absoluten Betrage e^x, zum Argument y.

Umgekehrt kann man eine komplexe Zahl vom Betrage r und mit dem Argument α einfach $re^{\alpha i}$ schreiben.

Durch gliedweise Multiplikation der Formeln (4) und (5) erhält man:

$$(9) \qquad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

eine bekannte trigonometrische Formel, die sich so für jedes komplexe x als bewiesen herausstellt.

Multipliziert man die Formeln:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

mit einander, so erhält man:

$$e^{(x+y)i} = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$

oder:

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) =$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y).$$

Vertauscht man x und y mit $-x$ und $-y$, so erhält man:

$$\cos(x+y) - i\sin(x+y) =$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y - i(\cos x \sin y + \cos y \sin x).$$

Hieraus erhält man die Formeln für die Addition der Bögen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \end{cases}$$

die also für beliebige reelle oder komplexe Werte x und y gelten.

Man erhält aus diesen letzten Formeln:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi,$$
$$\sin(x+yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi$$

und nach (6):

$$\cos yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sin yi = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Ist daher y reell, so ist auch $\cos yi$ reell und $\sin yi$ rein imaginär. Substituiert man diese Ausdrücke in die letzten Formeln, so erhält man, wenn man x und y als reell voraussetzt, $\cos(x+yi)$ und $\sin(x+yi)$ in der Form $a+bi$.

148. Die Funktionen $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ zeigen viele Ähnlichkeit mit den Kreisfunktionen Cosinus und Sinus; obwohl sie sich durch die Exponentialfunktionen ausdrücken und daher keine neuen Funktionen sind, so legt man ihnen die Namen *hyperbolischer Cosinus* und *hyperbolischer Sinus* bei und stellt sie durch die Schreibweise dar:

$$\mathrm{Coh}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Sih}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Man erhält mit gröſster Leichtigkeit die Formeln:

$$\text{Coh}(-x) = \text{Coh}\, x, \quad \text{Sih}(-x) = -\text{Sih}(x)$$

$$\text{Coh}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\text{Sih}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^x = \text{Coh}\, x + \text{Sih}\, x$$

$$e^{-x} = \text{Coh}\, x - \text{Sih}\, x$$

$$1 = \text{Coh}^2 x - \text{Sih}^2 x$$

$$\cos ix = \text{Coh}\, x, \quad \sin ix = i\, \text{Sih}\, x$$

$$\text{Coh}(x + y) = \text{Coh}\, x\, \text{Coh}\, y + \text{Sih}\, x\, \text{Sih}\, y$$

$$\text{Sih}(x + y) = \text{Sih}\, x\, \text{Coh}\, y + \text{Coh}\, x\, \text{Sih}\, y.$$

Die anderen trigonometrischen Funktionen werden durch ihre Ausdrücke in sin und cos definiert, die für reelles x die Ergebnisse von Beweisen sind; so setzt man z. B. für komplexes x:

$$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

oder, wenn man alles durch Exponentialfunktionen ausdrückt:

$$\text{tang}\, x = \frac{1}{i} \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}. \tag{12}$$

Eine ähnliche Definition giebt man für den hyperbolischen Tangens und setzt:

$$\text{Tah}\, x = \frac{\text{Sih}\, x}{\text{Coh}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Man erhält daraus:

$$\text{tang}\, ix = i\, \text{Tah}\, x, \quad \text{u. s. w.}$$

149. Man sagt, daſs y der natürliche Logarithmus von x ist und schreibt

$$y = \log x,$$

wenn

$$e^y = x$$

ist. Setzt man $x = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ und $y = p + qi$, so hat man:

$$e^y = e^{p+qi} = e^p(\cos q + i \sin q).$$

Damit diese komplexe Zahl gleich x ist, ist notwendig, daſs die absoluten Beträge gleich sind und die Argumente sich nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden. Man erhält daher aus der Gleichung $e^y = x$ die folgenden zwei zwischen reellen Gröfsen:

$$e^p = r,$$

$$q = \alpha + 2k\pi \qquad (k \text{ ganzzahlig}).$$

Die zweite bestimmt q, aus der ersten erhält man p in eindeutiger Weise, da r reell und positiv ist und daher ein einziger reeller Wert p existiert, für den $e^p = r$ ist; dieser ist der Logarithmus von r, welcher bei den Funktionen von reellen Veränderlichen definiert wurde; wir wollen ihn durch die Schreibweise bezeichnen:

$$p = \log' r.$$

Sind auf diese Weise p und q bestimmt, so wird, da

$$p + qi = y = \log x$$

ist:

$$\text{(13)} \qquad \log[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)] = \log' r + i(\alpha + 2k\pi).$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl hat also unendlich viele Werte. Sein reeller Teil ist immer derselbe und ist der Logarithmus (im Sinne der reellen Veränderlichen) des absoluten Betrages. Der Koeffizient von i ist das um ein willkürliches Vielfaches von 2π vermehrte Argument.

Ist die Zahl, deren Logarithmus man bilden will, reell und positiv, so ist sie gleich ihrem Betrage r und als Argument kann man die Null nehmen. Also giebt die vorige Formel:

$$\log r = \log' r + 2k\pi i.$$

Der Logarithmus einer reellen positiven Zahl hat also unendlich viele Werte; einer ist reell, er entspricht dem Werte $k = 0$ und giebt den für die reellen Veränderlichen definierten Logarithmus. Alle anderen sind imaginär und paarweise konjugiert; denn man erhält konjugierte Werte für $\log r$, wenn man k entgegengesetzt gleiche Werte giebt.

Es sei jetzt $-r$ eine reelle negative Zahl; ihr Betrag ist r und als Argument kann man π nehmen; daher wird:

$$\log(-r) = \log' r + (2k+1)\pi i.$$

Alle diese Werte sind imaginär. Erteilt man k die Wertepaare

$(0, -1)$; $(1, -2)$; $(2, -3) \cdots$, so erhält $\log(-r)$ konjugiert imaginäre Werte:

$$\log' r \pm \pi i, \quad \log' r \pm 3\pi i, \quad \log' r \pm 5\pi i, \cdots.$$

150. Der Schreibweise u^v erteilt man bei komplexem u und v die Bedeutung:

$$u^v = e^{v \log u},$$

die eine Identität ist, wenn u und v reell sind und $u > 0$ ist. Nun hat $\log u$ unendlich viele Werte; nennt man $\log u$ einen von diesen, so ergeben sich alle übrigen aus der Formel:

$$\log u + 2k\pi i.$$

Also hat auch u^v unendlich viele, im allgemeinen verschiedene Werte.

So hat z. B. der Ausdruck i^i nach den gemachten Verabredungen die Bedeutung $e^{i \log i}$, und da:

$$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{(4k+1)\pi}{2} \cdot i$$

ist, so erhält man:

$$i^i = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}},$$

also unendlich viele Werte, die sämtlich reell sind.

151. Wir sagen, daſs $x = \operatorname{arc} \sin z$ oder $x = \operatorname{arc} \cos z$ ist, wenn $\sin x = z$ oder $\cos x = z$ ist. Diese inversen Kreisfunktionen können leicht auf Logarithmen reduziert werden. In der That, nimmt man auf beiden Seiten der Gleichung (4) die Logarithmen, so erhält man:

$$xi = \log(\cos x + i \sin x). \tag{14}$$

Setzt man in ihr $\sin x = z$, also $\cos x = \sqrt{1 - z^2}$ und $x = \operatorname{arc} \sin z$, so erhält man:

$$\operatorname{arc} \sin z = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{1 - z^2} + zi\right). \tag{15}$$

Setzt man ebenso in Formel (14)

$$\cos x = z, \quad \sin x = \sqrt{1 - z^2}, \quad x = \operatorname{arc} \cos z,$$

so wird:

$$\operatorname{arc} \cos z = \frac{1}{i} \log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right). \tag{16}$$

Untersucht man die Formel (15), so erkennt man, daſs der Ausdruck $\sqrt{1-z^2}+zi$ bei gegebenem z dem doppelten Vorzeichen der Wurzel entsprechend zwei verschiedene Werte hat. Jedem von ihnen entsprechen noch unendlich viele Werte von arc sin z, da der Logarithmus unendlich viele Werte hat. Ist z reell und kleiner als 1, so ist $\sqrt{1-z^2}$ reell und der Betrag von $\sqrt{1-z^2}+zi$ ist die Einheit, der Logarithmus dieses Ausdruckes ist rein imaginär, also hat arc sin z einen reellen Wert. Ist aber z reell und gröſser als 1 oder imaginär, so ergiebt sich auch arc sin z imaginär. So ist z. B.:

$$\begin{aligned}\arcsin 2 &= \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{-3}+2i\right) = \frac{1}{i}\log i\left(\sqrt{3}+2\right)\\ &= \frac{1}{i}\log'\left(\sqrt{3}+2\right)+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi.\end{aligned}$$

Dividiert man die Formel (4) durch (5), so kommt:

$$e^{2xi} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{1+i\operatorname{tang} x}{1-i\operatorname{tang} x}.$$

Nimmt man die Logarithmen:

$$x = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\operatorname{tang} x}{1-i\operatorname{tang} x},$$

und setzt tang $x = z$, $x = \operatorname{arc\,tg} z$, so hat man:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+zi}{1-zi} = \frac{i}{2}\log\frac{1-iz}{1+iz}. \tag{17}$$

So bleiben die Exponentialfunktionen und Logarithmen, sowie die direkten und inversen trigonometrischen Funktionen auch für komplexe Werte der Veränderlichen definiert und man sieht, daſs die direkten trigonometrischen Funktionen sich durch Exponentialfunktionen, die inversen durch Logarithmen ausdrücken lassen. Macht man also aus der Exponentialfunktion und ihrer Umkehr, dem Logarithmus, nur eine Kategorie von Funktionen, so schlieſst man, daſs alle bisher in die Rechnung eingeführten transcendenten Funktionen sich auf e^x als einzige Transcendente zurückführen lassen.

§ 4. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

152. Wir sagen, daſs w eine Funktion der komplexen Veränderlichen z ist und schreiben $w = f(z)$, wenn zu jedem Werte von z ein Wert von w gehört.

Setzt man $w = u + vi$, $z = x + yi$, wo u, v, x, y reelle Veränderliche sind, so sind, wenn w eine Funktion von z ist, auch u und v reelle Funktionen von x und y.

Wir sagen, dafs die Funktion $w = f(z)$ eine Ableitung besitzt, wenn der Ausdruck:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

gegen einen Grenzwert konvergiert, während die komplexe Veränderliche h gegen null konvergiert. Dieser Grenzwert ist der Wert der Ableitung $f'(z)$, welcher dem betrachteten Werte von z entspricht.

153. Man setze

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

und

$$h = k + li,$$

wo k und l reelle Zahlen sind. Man erhält:

$$f(z) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)i$$

und

$$f(z+h) = \varphi(x+k, y+l) + \psi(x+k, y+l)i$$

und daher

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{[\varphi(x+k, y+l) - \varphi(x, y)] + [\psi(x+k, y+l) - \psi(x, y)]i}{k+li}.$$

Besitzt w eine Ableitung $f'(z)$, so konvergiert $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ gegen $f'(z)$, in welcher Weise man auch Δz null werden läfst. Man setze zunächst in $\Delta z = h = k + li$ den imaginären Teil li null; man erhält dann:

$$\lim \frac{\varphi(x+k, y) - \varphi(x, y) + [\psi(x+k, y) - \psi(x, y)]i}{k} = f'(z).$$

Damit dies eintritt, müssen der reelle und der imaginäre Teil gegen Grenzwerte konvergieren. Daher besitzen die Funktionen φ und ψ die partiellen Ableitungen nach x und man hat:

$$f'(z) = \varphi_x'(x, y) + i\psi_x'(x, y).$$

Setzt man andrerseits in Δz den reellen Teil k gleich null, so kommt:

$$\lim \frac{\varphi(x, y+l) - \varphi(x, y) + i[\psi(x, y+l) - \psi(x, y)]}{li} = f'(z).$$

Durch eine ähnliche Überlegung schliefst man daher auf die Existenz der partiellen Ableitungen von φ und ψ nach y und erhält:

$$f'(z) = \psi_y'(x, y) - \varphi_y'(x, y)\,i.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von $f'(z)$ mit dem vorigen, so erhält man, da beide identisch sein müssen:

$$\varphi_x'(x, y) = \psi_y'(x, y), \quad \text{und} \quad \psi_x'(x, y) = -\varphi_y'(x, y),$$

das heifst:

Damit $w = u + vi$ eine Funktion von $z = x + yi$ wird, die eine bestimmte Ableitung besitzt, ist notwendig, dafs die reellen Funktionen u und v der Veränderlichen x und y den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Differentiiert man die erste Gleichung nach x, die zweite nach y und beachtet, dafs $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ ist, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion u allein. In ähnlicher Weise ergiebt sich, wenn man die erste Gleichung nach y und die zweite nach x differentiiert, durch Subtraktion

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Also genügt auch v derselben partiellen Differentialgleichung, der u genügt.

154. *Wenn die u und v nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und wenn die Bedingungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllt sind, so besitzt die Funktion $w = u + vi$ eine Ableitung.

In der That, man hat (Nr. 105)

$$\varphi(x + k, y + l) - \varphi(x, y) = k\varphi_x'(x, y) + l\varphi_y'(x, y) + \alpha k + \beta l,$$
$$\psi(x + k, y + l) - \psi(x, y) = k\psi_x'(x, y) + l\psi_y'(x, y) + \alpha' k + \beta' l.$$

Addiert man die zweite Gleichung, nachdem man sie mit i multipliziert hat, zur ersten, so erhält man:

$$\Delta w = k(\varphi_x' + i\psi_x') + l(\varphi_y' + i\psi_y') + \alpha k + \beta l + \alpha' ik + \beta' il,$$

oder, wenn man beachtet, dafs $\psi_y' = \varphi_x'$ und $\varphi_y' = -\psi_x' = i^2\psi_x'$ ist:

$$\Delta w = (k + li)(\varphi_x' + i\psi_x') + \alpha k + \beta l + \alpha' ik + \beta' il.$$

Durch Division mit $k + li = \Delta z$ folgt:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \varphi_x' + i\psi_x' + \alpha \frac{k}{k+li} + \beta \frac{l}{k+li} + \alpha' i \frac{k}{k+li} + \beta' i \cdot \frac{l}{k+li}.$$

Man lasse jetzt Δz null werden, dann werden auch k und l und mit ihnen α, β, α', β' null. Die Ausdrücke:

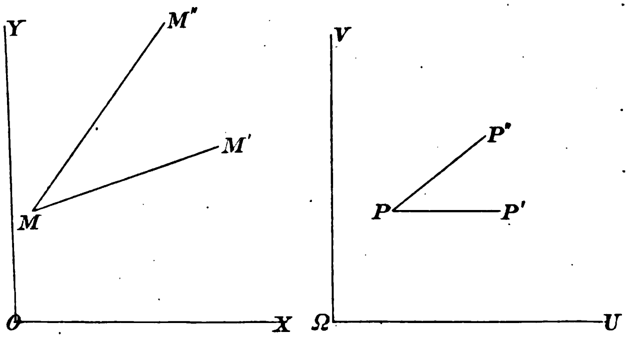
$$\frac{k}{k+li} \quad \text{und} \quad \frac{l}{k+li}$$

bleiben endlich, da ihr Betrag kleiner als 1 ist; also wird

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \varphi_x' + \psi_x' \cdot i.$$

155. Man stelle die Veränderliche $z = x + yi$ auf einer Ebene durch einen Punkt M dar, dessen rechtwinklige Cartesische Koordinaten x und y sind. In ähnlicher Weise stelle man in einer zweiten Ebene die Funktion $w = u + vi$ durch einen Punkt P dar, dessen Koordinaten u und v sind. Da w eine Funktion von z ist, so gehört zu jedem Punkte M der ersten Ebene ein Punkt P in der zweiten und daher bestimmt die komplexe Funktion $w = f(z)$ eine Abbildung der Punkte der ersten Ebene auf die der zweiten.

Fig. 4.



Erteilt man z den neuen Wert $z + h$, der durch den Punkt M' dargestellt sein möge, so wird $|h|$ durch die

Strecke MM' und das Argument von h durch den Winkel zwischen MM' und der x-Achse bestimmt. Ist P' der Bildpunkt von M', so wird $PP' = |\Delta w|$ und der Winkel: $\widehat{PP', \Omega U} = \arg \Delta w$. Läfst man jetzt Δz null werden, so wird, wenn $f(z)$ eine Ableitung besitzt:

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$$

und daher:

$$\lim \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim \frac{PP'}{MM'} = |f'(z)|.$$

Ist $|f'(z)|$ nicht null, so wird auch:

$$\lim \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim (\arg \Delta w - \arg \Delta z)$$
$$= \lim [\widehat{P'P, \Omega U} - \widehat{M'M, OX}] = \arg f'(z).$$

Ist M'' ein zweiter Punkt in der Nähe von M und P'' sein Bildpunkt, so wird auch:

$$\lim \frac{PP''}{MM''} = |f'(z)|, \quad \lim [\widehat{P''P, \Omega U} - \widehat{M''M, OX}] = \arg f'(z).$$

Also schliefst man:

$$\lim \frac{PP''}{MM''} : \frac{PP'}{MM'} = 1,$$

$$\lim [(\widehat{P''P, \Omega U} - \widehat{P'P, \Omega U}) - (\widehat{M''M, OX} - \widehat{M'M, OX})] = 0.$$

Die letzte Gleichung kann man auch schreiben:

$$\lim (\angle P''PP' - \angle M''MM') = 0.$$

Die erste Gleichung kann man dadurch deuten, dafs man sagt, wenn M' und M'' nach M hineinrücken, so werden $\frac{PP''}{MM''}$ und $\frac{PP'}{MM'}$ einander gleich und daher werden die Seiten MM', MM'', PP', PP'' an der Grenze einander proportional. Die zweite Gleichung sagt aus, wenn man M' und M'' der Art variieren läfst, dafs $\angle M''MM'$ gegen einen Grenzwert konvergiert, dafs dann:

$$\lim P''PP' = \lim M''MM'$$

wird. Dies kann man so deuten, dafs man sagt, die Winkel $M''MM'$ und $P''PP'$ konvergieren gegen die Gleichheit. Daher konvergieren die Dreiecke $M'MM''$ und $P'PP''$ gegen die Ähnlichkeit. Dieses ganze Verhalten pflegt man dadurch auszudrücken, dafs man sagt, die beiden Ebenen sind in ihren kleinsten Teilen einander ähnlich. Das Vorhergehende darf man jedoch nicht anders auffassen, als eine Versinnlichung der gefundenen Formeln.

156. Wir setzen auch für imaginäre Veränderliche die Differentiationsregeln für reelle Veränderliche als bewiesen voraus, die für eine Summe, ein Produkt, einen Quotienten, für Funktionen von Funktionen und inverse Funktionen gelten (Nr. 34—38); denn der Beweis ist ganz derselbe.

Die Ableitung der Exponentialfunktion kann man auf folgende Weise erhalten. Es ist:

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h,$$

also

$$(1) \qquad \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Nun ist:

$$e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots,$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{1} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots,$$

$$\frac{e^h - 1}{h} - 1 = h\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \cdots\right]$$

und

$$(2) \qquad \left|\frac{e^h - 1}{h} - 1\right| = |h| \cdot \left|\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \cdots\right|.$$

Der zweite Faktor in den Betragstrichen auf der rechten Seite ist endlich und wird, wenn k eine positive Zahl ist, die den Betrag von h übersteigt:

$$\left|\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \cdots\right| < \frac{1}{2!} + \frac{k}{3!} + \cdots.$$

Läfst man daher h null werden, so hat das Glied auf der rechten Seite den Grenzwert null und es wird

$$\lim \left|\frac{e^h - 1}{h} - 1\right| = 0$$

oder:

$$\lim \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Aus der Formel (1) erhält man daher:

$$\lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x;$$

d. h. die Ableitung von e^x ist wieder e^x.

Aus der Ableitung von e^x lassen sich die Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ berechnen; denn diese Funktionen lassen sich durch Exponentialfunktionen ausdrücken. Man hat:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

Also folgt durch Differentiation:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = i\,\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = -\sin x,$$

genau wie bei den reellen Veränderlichen.

Wendet man die Differentiationsregeln für die inversen Funktionen an, so findet man die Ableitungen von $\log x$, $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x, \cdots$, welche mit den für reelle Veränderliche gefundenen Ausdrücken zusammenfallen.

§ 5. Potenzreihen in einer Veränderlichen.

157. *Satz. Wenn in einer Reihe:*

$$u_0,\ u_1 x,\ u_2 x^2,\ u_3 x^3 \cdots,$$

in der $u_0, u_1, \cdots$ von x unabhängige Gröfsen sind, für einen bestimmten Wert von $|x| = R$, der Betrag des allgemeinen Gliedes, $|u_n x^n|$, nicht beliebig grofse Werte annimmt, so konvergiert die vorgelegte Reihe für jedes x, dessen Betrag kleiner als R ist.

In der That, man nehme an, dafs der Betrag des allgemeinen Gliedes für den Wert von x, dessen Betrag R ist, immer kleiner als eine endliche Gröfse A sei. Dann ist:

$$|u_n| \cdot R^n < A.$$

Erteilt man x einen Wert, dessen Betrag r kleiner ist als R, so wird der Betrag des allgemeinen Gliedes der Reihe: $|u_n x^n| = |u_n| r^n$; dies kann man schreiben: $|u_n| R^n \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n$. Nach Voraussetzung ist daher $|u_n x^n| < A\left(\frac{r}{R}\right)^n$. Die Reihe aber, deren allgemeines Glied $A\left(\frac{r}{R}\right)^n$ ist, konvergiert; denn sie ist eine geometrische Progression, deren Quotient $\frac{r}{R}$ kleiner als 1 ist.

Daher konvergiert die Reihe aus den absoluten Beträgen der Glieder der gegebenen Reihe; denn deren Glieder sind kleiner als die entsprechenden einer konvergenten Reihe. Also konvergiert auch die vorgelegte Reihe.

Korollar. *Wenn die Reihe $u_0, u_1 x, u_2 x^2, \cdots$ für einen Wert x konvergiert, dessen Betrag R ist, so konvergiert sie auch für jedes x, dessen Betrag kleiner als R ist.*

In der That, konvergiert die Reihe für den betrachteten Wert von x, so hat der Betrag des allgemeinen Gliedes bei unbegrenzt wachsendem n den Grenzwert null. Also bleiben von einer bestimmten Stelle an die Beträge der Reihenglieder kleiner als eine endliche (positive) Zahl, die willkürlich gewählt werden kann. Die vorausgehenden Glieder sind endlich und in endlicher Anzahl; sie bleiben daher kleiner als eine endliche Zahl. Also bleiben die Beträge aller Glieder kleiner als eine endliche Zahl und wir kommen auf den vorigen Satz.

158. Eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe kann für alle x konvergieren; dies würde der Fall sein bei der Reihe:

$$1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \cdots,$$

deren Summe e^x ist; sie kann aber auch für keinen Wert von x konvergieren aufser für $x = 0$, wo die Reihe sich auf das erste Glied reduziert. Ein Beispiel dafür ist die Reihe:

$$1, \quad 1!\,x, \quad 2!\,x^2, \cdots.$$

Denn nimmt man in ihr $|x| > 0$, so hat das allgemeine Glied zum Grenzwert ∞. Es kann sich aber auch ereignen, dafs die vorgelegte Reihe für einige Werte von x konvergiert, für andere divergiert. Es sei ϱ die obere Grenze der Werte von $|x|$, für welche die Reihe konvergiert.

Dann konvergiert die gegebene Reihe für alle Werte x, deren Betrag kleiner als ϱ ist, sie divergiert für diejenigen, deren Betrag gröfser als ϱ ist. Für Werte x, deren Betrag gleich ϱ ist, kann sie konvergent oder divergent sein.

So konvergiert die geometrische Progression

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \cdots$$

für jedes x, dessen Betrag kleiner als 1 ist; sie divergiert für die x, deren Betrag $\geqq 1$ ist.

Die Gröſse ϱ heiſst der *Konvergenzradius* der Reihe. Stellt man die komplexe Variabele in einer Ebene dar und beschreibt um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius ϱ, so heiſst dieser der *Konvergenzkreis*. Die vorgelegte Reihe konvergiert für alle Werte der Veränderlichen, die durch Punkte im Inneren des Konvergenzkreises dargestellt werden; sie divergiert für die Punkte im Äuſseren.

159. *Wenn die Reihe:*

$$u_0, \quad u_1 x, \quad u_2 x^2, \cdots$$

für die Werte x konvergiert, deren Betrag kleiner als ϱ ist, so konvergieren für dieselben Werte von x auch die Reihen, die aus den Ableitungen der einzelnen Glieder gebildet sind, und setzt man:

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots, \\ f'(x) &= \quad\; 1 u_1 \;\; + 2 u_2 x + \cdots, \\ f''(x) &= \qquad\qquad 2 \cdot 1 u_2 \;+ \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so sind die Funktionen $f'(x), f''(x), \cdots$ die erste, zweite, $\cdots$ Ableitung von $f(x)$.

In der That, nennt man r den Betrag von x, und nimmt man $r < \varrho$ an und nennt R eine Zahl zwischen r und ϱ, so konvergiert die gegebene Reihe auch, wenn man x einen Wert vom Betrage R giebt. Daher hat der Betrag des allgemeinen Gliedes $u_n x^n$, der immer kleiner ist als $|u_n| R^n$, den Grenzwert null bei wachsendem n. Er ist daher immer endlich und wir können voraussetzen:

$$|u_n| R^n < A.$$

Nun hat das allgemeine Glied der Reihe der Ableitungen, das $u_n n x^{n-1}$ ist, zum Betrage:

$$n\,|u_n|\,r^{n-1} = n\,|u_n|\,R^n \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{R} < nA \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{1}{R}.$$

Aber die Reihe, deren allgemeines Glied $nA\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{1}{R}$ ist, konvergiert, da der Betrag des Verhältnisses eines Gliedes zum vorhergehenden den Grenzwert $\frac{r}{R} < 1$ hat. Mithin konvergiert auch die Reihe aus den Beträgen der Glieder von $f'(x)$ und endlich auch die Reihe für $f'(x)$.

Die Reihe für $f''(x)$ entsteht ebenso aus der Reihe für $f'(x)$, wie diese aus der Reihe für $f(x)$, sie ist daher ebenfalls konvergent; das Gleiche gilt, welches auch die Zahl der vollführten Differentiationen sein mag.

Dies vorausgeschickt, hat man:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_n u_n x^n,$$

$$f(x+h) = \sum_0^\infty {}_n u_n (x+h)^n,$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum u_n [(x+h)^n - x^n] \\ &= \sum u_n \left[n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots\right], \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum u_n \left[n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots\right].$$

Subtrahiert man hiervon die Reihe:

$$f'(x) = \sum_0^\infty {}_n n u_n x^{n-1},$$

so wird:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = h \sum_0^\infty {}_n u_n \left[\binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{3} x^{n-3} h + \cdots\right]$$

$$= \frac{h}{2!} \sum_0^\infty {}_n n(n-1) u_n \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} x^{n-4} h^2 + \cdots\right].$$

Um nun zu beweisen, dafs

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

ist, braucht man nur zu zeigen, dafs das Glied auf der rechten Seite der vorigen Gleichung mit h gegen null konvergiert und man braucht also nur zu erkennen, dafs der mit h multiplizierte Faktor endlich ist.

Man nehme $|h|$ so klein, dafs $|x| + |h| < \varrho$ ist; dies ist möglich, da $|x| < \varrho$ ist. Ferner werde R so gewählt, dafs

$$|x| + |h| < R < \varrho$$

ist. Dann wird:

$$\left| x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} x^{n-4} h^2 + \cdots \right|$$

$$< |x|^{n-2} + \frac{n-2}{3} |x|^{n-3} |h| + \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} |x|^{n-4} |h|^2 + \cdots$$

$$< |x|^{n-2} + \frac{n-2}{1} |x|^{n-3} |h| + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} |x|^{n-4} |h|^2 + \cdots$$

$$< (|x| + |h|)^{n-2} < R^{n-2}.$$

Der Betrag des allgemeinen Gliedes der betrachteten Reihe wird also kleiner als

$$n(n-1) \, |u_n| \, R^{n-2}.$$

Nun ist aber bewiesen, dafs die Reihe, deren allgemeines Glied $n(n-1) u_n x^{n-2}$ ist, konvergiert und es ist auch die Reihe ihrer absoluten Beträge für jedes x, dessen Betrag kleiner als ϱ ist, konvergent. Also konvergiert die Reihe auch für Werte x, deren Betrag R ist. Mithin konvergiert die Reihe, deren allgemeines Glied $n(n-1) \, |u_n| \, R^{n-2}$ ist und hat eine endliche Summe B. Dasselbe gilt für die Reihe:

$$\sum_0^\infty {}_n \, n(n-1) u_n \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \cdots \right],$$

deren Betrag kleiner als B ist und es wird:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \frac{1}{2} |h| B.$$

Da nun das Glied auf der rechten Seite den Grenzwert null hat, so schliefst man, dafs $f'(x)$ auch die Ableitung von $f(x)$ ist.

Da die Funktionen $f(x), f'(x), \cdots$ eine Ableitung besitzen, so sind sie auch stetig. Wendet man den vorigen Satz auf die Reihe an, welche e^x definiert:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

so wird:

$$\frac{de^x}{dx} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

oder

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Ähnlich findet man durch Differentiation der Reihen:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

die Gleichungen:

$$d \sin x = \cos x \, dx, \quad d \cos x = - \sin x \, dx.$$

160. Die vorigen Sätze lassen eine gewisse Analogie zwischen den Funktionen hervortreten, die als Summen von Potenzen einer Veränderlichen innerhalb ihres Konvergenzkreises definiert sind, mit den ganzen Funktionen. Diese Analogie tritt noch mehr hervor durch die folgenden Sätze.

Satz. Wenn die Reihe

$$(1) \qquad f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

für diejenigen Werte x *konvergiert, deren Betrag kleiner als* ϱ *ist, so gilt die Taylorsche Reihe:*

$$(2) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots,$$

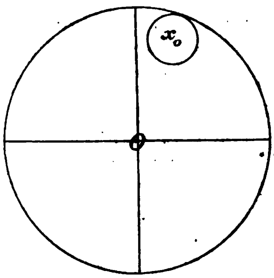
wenn $|x_0| < \varrho$ *vorausgesetzt wird für alle Werte* h, *für die*

$$|h| < \varrho - |x_0|$$

ist.

Greift man mit anderen Worten auf die geometrische Darstellung zurück, so definiert (1) eine Funktion $f(x)$ für alle Werte x, die durch Punkte im Inneren eines um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreises liegen. Ist x_0 ein Punkt im Inneren eines Kreises, so will man beweisen, daſs die Reihe (2) konvergiert und zur Summe $f(x_0 + h)$ hat für alle Werte h, deren Betrag kleiner als $\varrho - |x_0|$ ist, also für alle Werte $x_0 + h$, die durch Punkte im Inneren eines um x_0

Fig. 5.



beschriebenen Kreises dargestellt sind, der den Konvergenzkreis der Reihe (1) von innen berührt. Es ist jedoch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs die nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe auch für andere Werte von h konvergiert.

In der That, setzt man:

$$(3)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\cdots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0)+R_m$$

und beachtet, dafs

$$f(x_0+h)=\sum u_n(x_0+h)^n,\quad f(x_0)=\sum u_n x_0^n,$$
$$f'(x_0)=\sum nu_n x_0^{n-1},\cdots$$
$$f^{(m)}(x_0)=\sum n(n-1)\cdots(n-m+1)u_n x_0^{n-m},\cdots$$

ist, so erhält man:

$$R_m=\sum u_n\left[(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\cdots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right].$$

Die Summen sind dabei über alle Werte n von 0 bis ∞ zu erstrecken. In dem Ausdruck für R_m sind jedoch die ersten Glieder, die den Werten $0, 1, \cdots m$ von n entsprechen, null. Daher braucht man in R_m dem n nur die Werte

$$m+1,\quad m+2,\cdots$$

zu erteilen. Nimmt man beiderseits die absoluten Beträge, so erhält man:

$$|R_m|<\sum_{m+1}^{\infty}|u_n|\cdot\left|(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\cdots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right|.$$

Es ist aber:

$$\left|(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\cdots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right|$$
$$<|x_0+h|^n+|x_0|^n+n|h|\,|x_0|^{n-1}+\cdots+\binom{n}{m}|h|^m|x_0|^{n-m}$$
$$<|x_0+h|^n+(|x_0|+|h|)^n.$$

Also wird:

$$(4)\quad |R_m|<\sum_{m+1}^{\infty}|u_n|\,|x_0+h|^n+\sum_{m+1}^{\infty}|u_n|\,[|x_0|+|h|]^n.$$

Die Reihen aber, deren allgemeine Glieder

$$|u_n|\,|x_0+h|^n\quad\text{und}\quad|u_n|\,[|x_0|+|h|]^n$$

sind, konvergieren. Daher haben die Summen in (4) bei unbegrenzt wachsendem m den Grenzwert null und daher wird auch

$$\lim |R_m| = 0$$

und $\lim R_m = 0$. Läfst man daher in (3) m unbegrenzt wachsen, so erhält man die zu beweisende Formel (2).

Satz. Wenn in der (für $|x| < \varrho$ konvergenten) Reihe:

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

nicht alle Koeffizienten null sind, so kann $f(x)$ zwar für $x = 0$ verschwinden, aber nicht in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x = 0$.

In der That, ist u_n der erste von null verschiedene Koeffizient, so hat man

$$\begin{aligned} f(x) &= u_n x^n + u_{n+1} x^{n+1} + \cdots \\ &= x^n [u_n + u_{n+1} x + \cdots]. \end{aligned}$$

Der erste Faktor verschwindet für $x = 0$, wenn $n > 0$ ist, er ist nicht null für irgend einen anderen Wert von x. Der zweite ist eine stetige Funktion von x, welche für $x = 0$ den von null verschiedenen Wert u_n annimmt; also ist sie auch in einer hinlänglich kleinen Umgebung von $x = 0$ nicht null und dasselbe gilt für $f(x)$.

Satz. Wenn $f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$ für von null verschiedene Werte x in jeder Umgebung von $x = 0$ verschwindet, so sind alle Koeffizienten $u_0, u_1, u_2, \cdots$ gleich null.

Dieser Satz ist eine Folge des vorhergehenden.

Satz. Wenn die Reihe

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

für die Werte x, deren Betrag kleiner als ϱ ist, konvergiert und wenn $f(x)$ für unendlich viele Werte verschwindet, deren Betrag kleiner als eine positive Zahl $R < \varrho$ ist, so sind alle Koeffizienten null und $f(x)$ verschwindet identisch.

In der That, es giebt einen Wert x_0 von x, dessen Betrag nicht gröfser als R ist, sodafs $f(x)$ in jeder Umgebung von x_0 verschwindet. Entwickelt man daher $f(x_0 + h)$ nach Potenzen von h, was gestattet ist, wenn $|h|$ kleiner als die endliche, $\varrho - R$ übersteigende Zahl $\varrho - |x_0|$ ist, so erhält man eine Funktion von h, die in jeder Umgebung von $h = 0$ für von null verschiedene Werte h verschwindet und diese ist daher identisch null für jene Umgebung. Mithin ist $f(x)$ identisch null für die Werte x, welche durch Punkte innerhalb eines um x_0 beschriebenen Kreises dargestellt sind, dessen Radius $\varrho - |x_0|$ ist. Betrachtet man jetzt einen zweiten Punkt x_1 innerhalb dieses Kreises, so ist $f(x)$ in seiner Umgebung null, also ist es auch null für alle Werte von x, die durch Punkte innerhalb eines um x_1 mit dem Radius $\varrho - |x_1|$ beschriebenen Kreises dargestellt werden. Fährt man so fort, so erkennt man, daſs $f(x)$ identisch null ist für alle Werte x und daher sind alle Koeffizienten null.

Satz. Wenn die Reihen

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots,$$
$$\varphi(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots$$

für die Werte x konvergieren, deren Betrag kleiner als ϱ ist, und wenn sie für unendlich viele Werte x übereinstimmen, deren Betrag kleiner als eine positive Zahl $R < \varrho$ ist, so sind die entsprechenden Koeffizienten in beiden Reihen einander gleich und die Reihen sind identisch.

In der That, man braucht nur den vorigen Satz auf die Reihe

$$f(x) - \varphi(x) = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1)x + (u_2 - v_2)x^2 + \cdots$$

anzuwenden.

Satz (von Abel). *Wenn die Reihe*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$

für den Wert x_0 von x konvergiert (von dem wir annehmen, daſs er auf der Peripherie des Konvergenzkreises liegt), so konvergiert $f(x)$ gegen $f(x_0)$, wenn man x der Art gegen x_0 konvergieren läſst, daſs $\frac{x}{x_0}$ nur reelle Werte annimmt und gegen 1 konvergiert.

In der That, nennt man $\varphi(x)$ die Summe der ersten m Glieder der Reihe:

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_{m-1} x^{m-1}$$

und nennt $\psi(x)$ den Rest der Reihe

$$\psi(x) = u_m x^m + u_{m+1} x^{m+1} + \cdots,$$

so hat man

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Aber man kann $\psi(x)$ in die Form setzen:

$$\psi(x) = u_m x_0^m \left(\frac{x}{x_0}\right)^m + u_{m+1} x_0^{m+1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+1} + \cdots$$

Man betrachte die Ausdrücke:

$$p_0 = u_m x_0^m,$$
$$p_1 = u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1},$$
$$p_2 = u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1} + u_{m+2} x_0^{m+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und nenne p den gröfsten ihrer absoluten Beträge oder deren obere Grenze; diese existiert, da jede der Gröfsen $p_0, p_1, \cdots$ endlich ist und da mit wachsendem Index

$$\lim p_n = \psi(x_0) = f(x_0) - \varphi(x_0)$$

eine endliche Zahl ist.

Setzt man noch:

$$r_n = u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1} \left(\frac{x}{x_0}\right) + \cdots + u_{m+n} x_0^{m+n} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

so hat man

$$r_n = p_0 + (p_1 - p_0) \left(\frac{x}{x_0}\right) + (p_2 - p_1) \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots$$
$$+ (p_n - p_{n-1}) \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

oder:

$$r_n = p_0 \left[1 - \frac{x}{x_0}\right] + p_1 \left[\frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] + \cdots$$
$$+ p_{n-1} \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right] + p_n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die absoluten Beträge und beachtet, dafs die Klammern reell und positiv sind und dafs auch die Beträge von $p_0, p_1, \cdots p_{n-1}, p_n$ nicht gröfser als p sind, so hat man:

$$|r_n| < p\left[1 - \frac{x}{x_0} + \frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right]$$

oder:

$$|r_n| < p.$$

Läfst man n unbegrenzt wachsen, so wird

$$\lim |r_n| = |\lim r_n| < p.$$

Nun hat man aber

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^m \lim r_n.$$

Nimmt man daher auf beiden Seiten die Beträge und bedenkt, dafs $\frac{x}{x_0}$ reell und kleiner als eins ist, so wird:

$$|\psi(x)| < \left(\frac{x}{x_0}\right)^m p < p.$$

Da aber die Reihe $f(x_0)$ konvergiert, so kann man m so grofs wählen, dafs in dieser Reihe die Summe einer beliebigen Zahl aufeinander folgender Glieder von dem mit dem Index m an, also auch die Zahlen $p_0, p_1, \cdots$, absolut kleiner als eine beliebig kleine Zahl ω sind. Daher ist auch ihre obere Grenze $p \leqq \omega$. Also kann man zu einer beliebig klein fixierten positiven Zahl ω ein m bestimmen, sodafs der Rest der Reihe für $f(x)$ vom $m + 1^{\text{ten}}$ Gliede an absolut kleiner als ω wird, welches auch der Wert von $\frac{x}{x_0}$ ist, wenn dieser nur reell und kleiner als 1 ist. Mit anderen Worten, die betrachtete Reihe hat komplexe Glieder; werden diese aber als Funktionen der reellen Veränderlichen $\frac{x}{x_0}$ zwischen 0 und 1 betrachtet, so ist sie gleichmäfsig konvergent.

Dies vorausgeschickt haben wir:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$f(x_0) = \varphi(x_0) + \psi(x_0);$$

wir erhalten also

$$f(x_0) - f(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) + \psi(x_0) - \psi(x).$$

Man kann m so grofs wählen, dafs $\psi(x_0)$ und $\psi(x)$ absolut kleiner als ω sind, man kann ferner x so nahe an x_0 annehmen, dafs

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x)| < \omega'$$

wird; denn $\varphi(x)$ ist eine stetige Funktion von x. Also kann man

$$|f(x_0) - f(x)| < \omega' + 2\omega$$

beliebig klein machen und daher wird

$$\lim f(x) = f(x_0),$$

w. z. bew. w.

Der vorstehende Satz läfst sich bei vielen Fragen anwenden. Hierfür ein Beispiel.

Satz. Wenn die Reihen

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \cdots$$
$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \cdots$$

konvergieren und auch die Reihe

$$w_0 = u_0 v_0, \; w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \cdots w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0, \cdots$$

konvergiert, so ist die Summe dieser Reihe gleich dem Produkte der Summen der beiden gegebenen Reihen (vergl. Nr. 145).

In der That, ist x eine positive Zahl kleiner als 1, so konvergieren die Reihen

$$u_0, \quad u_1 x, \quad u_2 x^2, \cdots$$
$$v_0, \quad v_1 x, \quad v_2 x^2, \cdots$$

und daher auch die Reihen ihrer absoluten Beträge. Aus dem Satz der Nr. 145 schliefst man daher für $x < 1$:

$$(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots)(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots)$$
$$= w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots.$$

Man lasse jetzt x gegen 1 konvergieren. Nach dem vorigen Satze konvergieren dann die Reihen

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$$
$$v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots$$
$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots,$$

beziehungsweise gegen die Summen der gegebenen Reihen und daher wird

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots,$$

w. z. bew. w.

Siebentes Kapitel.

Unbestimmte Integrale.

§ 1. Begriff des unbestimmten Integrales.

161. Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, heifst die *primitive Funktion* oder das *Integral* von $f(x)$ oder des Differentiales $f(x)\,dx$ und man schreibt:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Nach der Definition ist diese Gleichung gleichbedeutend mit der folgenden

$$F'(x) = f(x).$$

Besitzt $f(x)$ ein Integral, so hat es auch unendlich viele; denn jede Funktion $F(x) + C$ hat ebenfalls die Ableitung $f(x)$, wenn C eine Konstante bedeutet; umgekehrt unterscheidet sich jede Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, von $F(x)$ nur um eine Konstante und hat daher die Form $F(x) + C$.

Der Ausdruck $F(x) + C$ heifst, solange man C nicht einen besonderen Wert erteilt, das *allgemeine Integral* von $f(x)\,dx$, weil, wenn man C verschiedene Werte erteilt, man alle Integrale von $f(x)\,dx$ findet, deren jedes auch ein *partikulares Integral* heifst. Die Integrale, mit denen wir uns gegenwärtig beschäftigen, pflegen *unbestimmte Integrale* genannt zu werden.

162. *Satz. Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) stetig ist, so giebt es eine und nur eine Funktion, die in dem Intervalle (a, b) definiert ist, deren Ableitung $f(x)$ ist und die einen willkürlichen gegebenen Wert für einen gegebenen Wert der Veränderlichen annimmt.*

Es sei z. B. $a < b$ und es seien

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, \quad x_n = b$$

wachsende Werte von x, die das Intervall (a, b) in n Teilintervalle zerlegen. Man bezeichne allgemein mit $l(\alpha, \beta)$ und $\lambda(\alpha, \beta)$ die obere, beziehungsweise untere Grenze der Werte, die $f(x)$ annimmt, während x im Intervalle (α, β) variiert; diese sind dann zugleich das Maximum und das Minimum (Nr. 21). Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion, die im Intervalle (a, b) folgendermafsen definiert ist:

Für $x = a$ wird $\varphi(a) = A$, wo A eine willkürlich gewählte positive Zahl ist; in dem Intervalle (a, x_1) einschliefslich der Grenzen sei:

$$\varphi(x) = A + (x - a)\, l(a, x_1),$$

in dem Intervalle (x_1, x_2) sei:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_1) + (x - x_1)\, l(x_1, x_2)\\ &= A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + (x - x_1)\, l(x_1, x_2)\end{aligned}$$

und allgemein sei im Intervalle (x_{r-1}, x_r):

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_{r-1}) + (x - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r)\\ &= A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + (x_2 - x_1)\, l(x_1, x_2) + \cdots\\ &\quad + (x_{r-1} - x_{r-2})\, l(x_{r-2}, x_{r-1}) + (x - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r).\end{aligned}$$

Die Zahlen $l(a, x_1)$, $l(x_1, x_2)$, $\cdots$ sind alle zwischen $l(a, b)$ und $\lambda(a, b)$ enthalten, man erhält daher:

$$A + l(a, b)(x - a) \geqq \varphi(x) \geqq A + \lambda(a, b)(x - a).$$

Die Natur der Funktion $\varphi(x)$ hängt von der Wahl der Werte $x_1, x_2, \cdots$ ab, die zwischen a und b eingeschoben sind, und erteilt man der Veränderlichen x einen festen Wert, variiert aber auf alle möglichen Arten $x_1, x_2, \cdots$, so wird $\varphi(x)$ im allgemeinen unendlich viele Werte annehmen, die alle zwischen endlichen Grenzen enthalten sind, wie dies aus der letzten Ungleichung hervorgeht. Es sei $F(x)$ die untere Grenze der Werte, welche $\varphi(x)$ annimmt, wenn man x fest läfst, und die Teilung in dem Intervalle (a, b) verändert. Ich behaupte dann, dafs die Funktion $F(x)$, welche für $x = a$ offenbar den Wert A annimmt, zur Ableitung $f(x)$ hat.

In der That, man gebe x zwei Werte X_1 und X_2 und es sei $X_2 > X_1$; führt man nun eine willkürliche Teilung des Intervalles (a, b) aus und berechnet den zugehörigen Wert von $\varphi(x)$, so wird, wenn X_1 in das Intervall (x_{r-1}, x_r) und X_2 in das Intervall (x_{s-1}, x_s) fällt:

$$\varphi(X_1) = A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + \cdots + (X_1 - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r)$$

und

$$\varphi(X_2) = A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + \cdots + (x_r - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r) + \cdots \\ + (X_2 - x_{s-1})\, l(x_{s-1}, x_s).$$

Man teile nun das Intervall (x_{r-1}, x_r) in die beiden Unterabteilungen (x_{r-1}, X_1) und (X_1, x_r) und das Intervall (x_{s-1}, x_s) in die beiden (x_{s-1}, X_2) und (X_2, x_s) und es sei $\varphi'(x)$ die $\varphi(x)$ analoge Funktion, welche dieser neuen Einteilung des Intervalles (a, b) entspricht. Dann wird:

$$\varphi'(X_1) = A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + \cdots + (X_1 - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, X_1)$$

und:

$$\varphi'(X_2) = A + (x_1 - a)\, l(a, x_1) + \cdots + (X_1 - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, X_1) \\ + (x_r - X_1)\, l(X_1, x_r) + \cdots + (X_2 - x_{s-1})\, l(x_{s-1}, X_2).$$

Vergleicht man daher die Ausdrücke von $\varphi'(X_1)$ und $\varphi(X_1)$ und beachtet, dafs $l(x_{r-1}, X_1) \leqq l(x_{r-1}, x_r)$ ist, so erhält man:

$$\varphi'(X_1) \leqq \varphi(X_1).$$

Vergleicht man ebenso $\varphi'(X_2)$ und $\varphi(X_2)$ und beachtet, dafs

$$(X_1 - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, X_1) + (x_r - X_1)\, l(X_1, x_r) \\ \leqq (x_r - x_{r-1})\, l(x_{r-1}, x_r)$$

und

$$l(x_{s-1}, X_2) \leqq l(x_{s-1}, x_s)$$

ist, so folgt

$$\varphi'(X_2) \leqq \varphi(X_2).$$

Andrerseits hat man

$$\varphi'(X_2) - \varphi'(X_1) = (x_r - X_1)\, l(X_1, x_r) + \cdots \\ + (X_2 - x_{s-1})\, l(x_{s-1}, X_2);$$

setzt man für $l(X_1, x_r) \cdots l(x_{s-1}, X_2)$ das eine Mal den Wert $l(X_1, X_2)$, den sie nicht übersteigen, das andere Mal den Wert $\lambda(X_1, X_2)$, den sie nicht unterschreiten, so erhält man:

$$(X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2) \geqq \varphi'(X_2) - \varphi'(X_1) \geqq (X_2 - X_1)\, \lambda(X_1, X_2).$$

Diese Ungleichung zerlegt sich in die zwei:

(a) $$\varphi'(X_2) \leqq \varphi'(X_1) + (X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2)$$

und

(b) $$\varphi'(X_2) \geqq \varphi'(X_1) + (X_2 - X_1)\, \lambda(X_1, X_2).$$

Nun ist aber $F(X_2)$ die untere Grenze der Werte von $\varphi(X_2)$ und daher auch die der Werte $\varphi'(X_2)$, also wird $\varphi'(X_2) \geqq F(X_2)$. Da aber $\varphi'(X_1) \leqq \varphi(X_1)$ gefunden ist, so erhält man aus der Ungleichung (a):

$$F(X_2) \leqq \varphi(X_1) + (X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2).$$

Da diese Ungleichung für alle Werte von $\varphi(X_1)$ erfüllt ist, so gilt sie auch noch für die untere Grenze $F(X_1)$ und es wird:

$$F(X_2) \leqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\, l(X_1, X_2)$$

und daher

(a′) $$\frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \leqq l(X_1, X_2).$$

In ähnlicher Weise erhält man aus der Ungleichung (b), wenn man beachtet, dafs $\varphi(X_2) \geqq \varphi'(X_2)$ und $\varphi'(X_1) \geqq F(X_1)$ ist:

$$\varphi(X_2) \geqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\, \lambda(X_1, X_2).$$

Daher wird auch $F(X_2)$, die untere Grenze von $\varphi(X_2)$, gröfser oder gleich der rechten Seite:

$$F(X_2) \geqq F(X_1) + (X_2 - X_1)\, \lambda(X_1, X_2)$$

und also:

(b′) $$\frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \geqq \lambda(X_1, X_2).$$

Die Relationen (a′) und (b′) geben vereint:

$$l(X_1, X_2) \geqq \frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} \geqq \lambda(X_1, X_2).$$

Diese Formel ist zwar unter der Bedingung $X_2 > X_1$ bewiesen, aber da in ihr X_1 und X_2 symmetrisch auftreten, so kann man diese Bedingung fortlassen. Setzt man in ihr $X_1 = x$, $X_2 = x + h$, so erhält man:

$$l(x, x+h) \geqq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqq \lambda(x, x+h).$$

Läfst man jetzt h null werden, so folgt aus der Stetigkeit von $f(x)$:

$$\lim l(x, x+h) = \lim \lambda(x, x+h) = f(x)$$

und daher wird:

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Die Funktion $F(x)$ besitzt also eine Ableitung und diese ist $f(x)$.

Auf diese Weise ist also eine Funktion $F(x)$ gefunden, welche für $x = a$ einen willkürlichen Wert A annimmt und deren Ableitung $f(x)$ ist, wie wir zeigen wollten.

§ 2. Integrationsregeln.

163. Aus den Formeln, welche die Differentiale der Funktionen geben, erhält man leicht andere Formeln, welche die Integrale jener Differentiale liefern.

So erhält man z. B. aus der Formel:

$$d\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx, \quad n \neq -1,$$

das Resultat:

$$[1] \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

die für jedes n gilt aufser für $n = -1$.

Nimmt man $x > 0$ an, so wird:

$$d \log x = \frac{dx}{x},$$

hieraus erhält man

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

Ist $x < 0$ und daher $-x$ positiv, so hat man:

$$d \log(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

Also wird für negatives x:

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C.$$

Übrigens fällt diese Formel mit der vorigen zusammen, wenn man imaginäre Gröfsen einführt; denn dann unterscheiden sich $\log x$ und $\log(-x)$ nur um ein ungerades Vielfaches von πi, das heifst um eine Konstante. Man erhält daher:

[2] $\int \frac{dx}{x} = \log x + C = \log(-x) + C = \frac{1}{2}\log(x^2) + C,$

wo aber die verschiedenen Konstanten nicht denselben Wert haben.

Man kann das Integral $\int \frac{dx}{x}$ auch aus dem $\int x^n dx$ herleiten, indem man n gegen -1 konvergieren läſst. Um die Richtigkeit davon zu erkennen, betrachte man von den unendlich vielen Werten von $\int x^n dx$ denjenigen, welcher für $x = 1$ verschwindet; dann wird:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Läſst man n gegen -1 konvergieren, so wird der Grenzwert der rechten Seite, den man durch Differentiation von Zähler und Nenner nach n erhält, gleich $\log x$, also der Wert von $\int \frac{dx}{x}$, welcher für $x = 1$ verschwindet.

164. Ähnlich erhält man aus der Formel

$$d \operatorname{arc tang} x = \frac{dx}{1 + x^2}$$

das Resultat:

[3] $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc tang} x + C.$$

Aus den Formeln:

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

erhält man

[4] $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$$

wo die beiden Konstanten nicht einander gleich sind. Diese beiden Ausdrücke lassen sich aber leicht auf einander zurückführen; denn es ist:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

und also unterscheiden sich $\arcsin x$ und $\arccos x$ nur um eine Konstante.

Wir wollen noch die folgenden Integrale erwähnen:

[5] $$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

[6] $$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C, \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

165. Die Summe

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx - \int \chi(x)\,dx$$

hat die Ableitung

$$\varphi(x) + \psi(x) - \chi(x)$$

und daher wird

[7] $$\int [\varphi(x) + \psi(x) - \chi(x)]\,dx$$
$$= \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(x)\,dx - \int \chi(x)\,dx,$$

das heifst: *Das Integral einer algebraischen Summe ist gleich der Summe der Integrale.*

Das Produkt $a\int f(x)dx$ hat zur Ableitung $af(x)$ und daher wird:

[8] $$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

oder: *Das Integral des Produktes aus einer Konstante und einer Funktion ist gleich der Konstanten mal dem Integrale der Funktion.*

Die Formeln [1], [2], [7] und [8] gestatten das Integral einer jeden Funktion der Form:

$$ax^m + bx^n + cx^p + \cdots$$

zu berechnen, wo $a, b, c \cdots$ beliebige Konstante und $m, n, p \cdots$ von -1 verschiedene Konstante sind und man erhält:

$$\int (ax^m + bx^n + cx^p + \cdots)\,dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + \cdots.$$

Jede ganze Funktion läfst sich auf die vorstehende Form bringen, in der $m, n, p \cdots$ ganze positive Zahlen sind. Man schliefst daraus:

Das Integral einer ganzen Funktion ist wieder eine ganze Funktion.

166. Setzt man in $\int f(x)\,dx$ ein $x = \varphi(t)$, so wird dieses eine Funktion von t und da sein Differential immer noch

$f(x)\,dx$ ist, wo aber jetzt $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ zu setzen ist, so schliefst man, dafs:

[9] $$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

ist und man hat so das gesuchte Integral in ein anderes transformiert vermittelst einer *Änderung der Veränderlichen.* Kann man das zweite Integral ausführen, so braucht man nur t durch seinen Ausdruck in x zu ersetzen, um das erste zu erhalten.

Beispiel. Es sei $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$ zu berechnen. Setzt man $x - a = t$, also $dx = dt$, so erhält man

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m}\,dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + C$$
$$= -\frac{1}{(m-1)\,t^{m-1}} + C.$$

Setzt man für t seinen Wert, so wird daher:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)\,(x-a)^{m+1}} + C.$$

Diese Formel gilt für $m \neq 1$. Im Falle $m = 1$ hat man:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d\,(x-a)}{x-a} = \log\,(x-a) + C,$$

oder $$= \log\,(a-x) + C,$$

oder $$= \frac{1}{2}\log\,(x-a)^2 + C.$$

167. Aus der Formel

$$d(uv) = udv + vdu,$$

in der u und v Funktionen von x sind, schliefst man

$$uv = \int udv + \int vdu$$

und daher

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

In dieser Formel besteht die Methode der *teilweisen Integration.* Um sie anzuwenden zerlege man das zu integrierende Differential in zwei Faktoren, in einen endlichen u und in einen zweiten dv, der das Differential einer leicht zu bestimmenden

Funktion ist. Das gesuchte Integral ist dann in zwei Teile zerlegt, von denen der eine bereits integriert, der andere mit dem Integralzeichen behaftet ist. Ist dieses neue Integral einfacher als das vorige, so hat man eine nützliche Anwendung dieser Methode gemacht.

Beispiel. Es sei gesucht $\int x^m \log x\, dx$. Man setze:

$$u = \log x, \quad dv = x^m\, dx,$$

dann wird

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

und man erhält:

$$\int x^m \log x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \int \frac{x^m\, dx}{m+1}.$$

oder:

$$\int x^m \log x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

§ 3. Integration der rationalen Funktionen.

168. Jede gebrochene rationale Funktion läſst sich auf die Form bringen:

$$\frac{F(x)}{f(x)},$$

wo $F(x)$ und $f(x)$ ganze Funktionen von x sind.

Ist der Grad des Zählers gröſser oder gleich dem des Nenners, so dividiere man $F(x)$ durch $f(x)$. Es sei Q der Quotient und R der Rest; dann wird:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{R}{f(x)}.$$

Integriert man, so läſst sich $\int Q\, dx$ ausführen und wir sind also auf die Integration eines Bruches geführt, dessen Zähler von niederem Grade als der Nenner ist. Um diese Integration auszuführen, brauchen wir die algebraische Theorie der Zerlegung der gebrochenen Funktionen in Brüche der Form

$$\frac{A}{(x-a)^m},$$

die *Partialbrüche* heiſsen.

169. Es sei daher jetzt der Grad von $F(x)$ kleiner als der von $f(x)$. Es sei a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und α die Ordnung ihrer Vielfachheit. Setzt man dann:

$$f(x) = (x - a)^\alpha \varphi(x),$$

so ist $\varphi(x)$ ein durch $x - a$ nicht teilbares Polynom und daher $\varphi(a) \neq 0$.

Die Gleichung:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}$$

gilt, welches auch A sein mag und man erhält aus ihr:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}.$$

Man bestimme jetzt die Konstante A so, daſs der Zähler des zweiten Bruches auf der rechten Seite durch $x - a$ teilbar wird; hierfür ist notwendig und hinreichend, daſs er für $x = a$ verschwindet und man hat die Gleichung:

$$F(a) - A\varphi(a) = 0,$$

aus der sich ergiebt:

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)}.$$

Dieser Wert ist endlich, da $\varphi(a)$ nicht null ist. Nachdem man so A bestimmt hat, kann man den zweiten Bruch vereinfachen; setzt man

$$F(x) - A\varphi(x) = (x - a) F_1(x),$$

so erhält man:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} \varphi(x)},$$

und es wird der Grad von $F_1(x)$ niedriger als der des Nenners, da der Grad von $F(x) - A\varphi(x)$ kleiner ist als der von $(x - a)^\alpha \varphi(x)$.

Ist $\alpha > 1$, so verfahre man mit dem zweiten Bruche auf der rechten Seite wie soeben mit dem gegebenen; man erhält dann:

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)}.$$

Fährt man so fort, so ergiebt sich:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{G(x)}{\varphi(x)},$$

wo $G(x)$ ein Polynom von niederem Grade als $\varphi(x)$ ist. Der neue Bruch $\frac{G(x)}{\varphi(x)}$ enthält nicht mehr die Wurzel a. Ist aber b eine β-fache Wurzel von $f(x)=0$ und also auch von $\varphi(x)=0$, so kann man in ähnlicher Weise $\frac{G(x)}{\varphi(x)}$ zerlegen. Fährt man so fort und sind $a, b, \cdots l$ die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, $\alpha, \beta, \cdots \lambda$ die Grade ihrer Vielfachheit, so wird:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = &\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\ &+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}\end{aligned}$$

und auf diese Weise ist der gegebene Bruch in Partialbrüche zerlegt.

170. Sind die Wurzeln $a, b, \cdots l$ von $f(x)=0$ einfach, so hat man:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l}.$$

Die konstanten Zähler erhält man durch das angegebene Verfahren. Setzt man also:

$$f(x) = (x-a)\,\varphi(x),$$

so wird

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)}.$$

Differentiiert man aber die vorige Gleichung, so hat man:

$$f'(x) = (x-a)\,\varphi'(x) + \varphi(x),$$

setzt man also $x=a$, so wird

$$f'(a) = \varphi(a)$$

und daher

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

Ähnlich erhält man:

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \cdots \quad L = \frac{F(l)}{f'(l)}.$$

Diese neuen Formeln sind oft für die Rechnung bequemer, weil man häufig leichter die Ableitung von $f(x)$, als seine Quotienten mit den Nennern $x - a$, $x - b \cdots$, bilden kann.

Ist

$$f(x) = (x - a)(x - b) \cdots (x - l),$$

so wird

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x - a} = (x - b)(x - c) \cdots (x - l)$$

und daher

$$\varphi(a) = \frac{F(a)}{\varphi(a)} = \frac{F(a)}{(a - b)(a - c) \cdots (a - l)}.$$

Ähnlich wird:

$$B = \frac{F(b)}{(b - a)(b - c) \cdots (b - l)}, \cdots \quad L = \frac{F(l)}{(l - a)(l - b) \cdots}.$$

Setzt man diese Werte in die erste Formel ein und multipliziert mit $f(x)$, so erhält man:

$$F(x) = \frac{(x-b)\cdots(x-l)}{(a-b)\cdots(a-l)} F(a) + \frac{(x-a)(x-c)\cdots(x-l)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-l)} F(b) + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-b)\cdots}{(l-a)(l-b)\cdots} F(l).$$

Diese Gleichung liefert ein Polynom $F(x)$, ausgedrückt durch die Werte, welche es an den Stellen $a, b, \cdots l$ annimmt, deren Zahl um 1 gröſser als der Grad von $F(x)$ ist. Diese Formel ist bekannt unter dem Namen der Lagrangeschen Interpolationsformel.

171. Die Differentialrechnung liefert nützliche Methoden um die Zähler der Partialbrüche auch im Falle der vielfachen Wurzeln zu bestimmen.

Behält man die vorigen Bezeichnungen bei und multipliziert die Gleichung:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - a)^{\alpha - 1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x - a} + \frac{G(x)}{\varphi(x)},$$

in der $f(x) = (x - a)^\alpha \varphi(x)$ ist, mit $(x - a)^\alpha$, so erhält man:

$$\frac{(x - a)^\alpha F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{\varphi(x)} = A + A_1(x - a) + \cdots + A_{\alpha-1}(x - a)^{\alpha-1} +$$
$$+ (x - a)^\alpha \cdot \frac{G(x)}{\varphi(x)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = a$, so reduziert sich das dritte Glied der Gleichung auf A, während das erste die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt; man kann seinen Grenzwert nach den bekannten Methoden bestimmen. Differentiiert man aber erst die Gleichung und setzt dann $x = a$, so reduziert sich das dritte Glied auf A_1 und man erhält zwei Ausdrücke für A_1 u. s. w.

Man kann auch bemerken, daſs die letzte Formel die Entwickelung von $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in ein Polynom giebt, das nach steigenden Potenzen von $x - a$ geordnet und durch das Restglied $(x-a)^\alpha \frac{G(x)}{\varphi(x)}$ der Taylorschen Formel vervollständigt ist und daſs dieses entweder aus der Taylorschen Entwickelung oder durch algebraische Division erhalten wird.

172. Nachdem man die Zerlegung von $\frac{F(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche erhalten hat, bekommt man sein Integral, indem man auf die Formeln zurückgreift:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^\alpha} = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + C \quad \text{für } \alpha > 1$$

und

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \log(x-a) + C = A \log(a-x) + C$$
$$= \frac{1}{2} A \log(x-a)^2 + C.$$

Man schlieſst hieraus:

Jede ganze rationale Funktion läſst sich durch rationale Funktionen und Logarithmen integrieren, sobald man alle Wurzeln des Nenners als bekannt ansieht.

Das Vorige gilt, mögen die Koeffizienten von F und f reell oder imaginär sein. Sind aber die Koeffizienten und ebenso x reell und hat $f(x)$ imaginäre Wurzeln, so ergiebt sich das Integral zusammengesetzt mit imaginären Zahlen und es ist bequem dies zu vermeiden. Zu diesem Zwecke beachte man, daſs wenn a eine α-fache komplexe Wurzel von $f(x) = 0$ ist, daſs dann auch die zu a konjugierte Zahl, die wir b nennen wollen, eine α-fache Wurzel der Gleichung ist. Daher sind die beiden Glieder

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{und} \quad \frac{B}{(x-b)^k}$$

konjugiert und ihre Integrale für $k > 1$:

$$-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \quad \text{und} \quad -\frac{B}{(k-1)(x-b)^{k-1}}$$

sind ebenfalls konjugiert imaginär und ihre Summe ist reell.

Ist $k = 1$, so hat die Summe

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

zum Integral:

$$A \log(x-a) + B \log(x-b).$$

Setzt man daher

$$a = p + qi, \quad b = p - qi,$$
$$A = h + ki, \quad B = h - ki,$$

so wird das Integral:

$$(h + ki) \log(x - p - qi) + (h - ki) \log(x - p + qi),$$

dies ist nach bekannten Formeln:

$$(h + ki)\left[\log \sqrt{(x-p)^2 + q^2} - i \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p}\right]$$
$$+ (h - ki)\left[\log \sqrt{(x-p)^2 + q^2} + i \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p}\right].$$

Dies wird einfach:

$$h \log[(x-p)^2 + q^2] + 2k \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p},$$

also ein Ausdruck, aus dem die imaginären Zahlen verschwunden sind.

Übrigens kann man dieses Integral auch erhalten ohne durch das Imaginäre hindurchzugehen; denn bringt man alles auf denselben Nenner, so hat man

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = 2\,\frac{h(x-p) - kq}{(x-p)^2 + q^2}$$

und das Integral hiervon ist gleich der Summe der beiden Integrale:

$$\int \frac{2h(x-p)\,dx}{(x-p)^2+q^2} = h\int \frac{d[(x-p)^2+q^2]}{(x-p)^2+q^2} = h \log [(x-p)^2+q^2]$$

und

$$-2k\int \frac{q\,dx}{(x-p)^2+q^2} = -2k\int \frac{d\left(\frac{x-p}{q}\right)}{\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1} = -2k\cdot \operatorname{arc\,tang}\frac{x-p}{q}.$$

Dies ist auch:

$$+\,2k \operatorname{arc\,tang} \frac{q}{x-p};$$

denn $-\operatorname{arc\,tang} z$ und $+\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z}$ unterscheiden sich nur um eine Konstante.

173. *Beispiele.*

1) $\int \frac{dx}{1-x^2}$.

Bedient man sich der vorigen Bezeichnungen, so hat man:

$F(x) = 1, \quad f(x) = 1 - x^2, \quad a = 1, \quad b = -1;$

$f'(x) = -2x, \quad A = \frac{F(a)}{f'(a)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)} = \frac{1}{2},$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right],$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}[\log(x+1) - \log(x-1)] + C = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c}$, oder, wie man auch schreiben kann, $\int \frac{a\,dx}{(ax+b)^2+(ac-b^2)}$.

Ist $ac - b^2 > 0$, so setze man $ax + b = \sqrt{ac-b^2}\cdot z$; dann wird:

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tang} z + C$$

und schliefslich

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + C.$$

Ist umgekehrt $ac - b^2 < 0$, so setze man

$$ax + b = \sqrt{b^2-ac}\cdot z;$$

dann wird:

$$\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-ac}} \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{z-1}{z+1} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \log \frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} + C.$$

3) $\int \frac{px+q}{ax^2+2bx+c}\, dx.$

Dies zerlegt sich in die Summe zweier Integrale:

$$\frac{p}{2a} \int \frac{2ax+2b}{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{p}{2a} \log (ax^2+2bx+c)$$

und:

$$\int \frac{q-\frac{bp}{a}}{ax^2+2bx+c}\, dx = \frac{aq-bp}{a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

das wir vorher erhalten hatten.

4) Allgemeiner kann man das Integral

$$\int \frac{p_0 x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_n}\, dx,$$

wo der Grad des Zählers um eine Einheit niedriger ist als der des Nenners, in die Summe der zwei Integrale zerlegen:

$$\frac{p_0}{nq_0} \int \frac{nq_0 x^{n-1} + (n-1) q_1 x^{n-2} + \cdots + q_{n-1}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_n}\, dx =$$

$$= \frac{p_0}{nq_0} \log (q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_n)$$

und:

$$\frac{1}{nq_0} \int \frac{[nq_0 p_1 - (n-1) q_1 p_0]\, x^{n-2} + \cdots}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots + q_n}\, dx.$$

In dem zweiten Integrale ist jetzt der Grad des Zählers um zwei Einheiten niedriger als der des Nenners.

5) $\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}\, dx,$

wo $f(x)$ eine ganze Funktion von niederem als n^{ten} Grade ist.

Geht man auf die Taylorsche Formel zurück, so hat man:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Hieraus erhält man

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(a)}{(x-a)^n} + \frac{f'(a)}{1!(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(x-a)}$$

und daher:

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}dx = -\frac{f(a)}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{f'(a)}{(n-2)(x-a)^{n-2}} - \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\log(x-a) + C.$$

174. Die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche kann man auch erhalten mit Hülfe des folgenden Satzes.

Satz. Sind

$$\varphi(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \cdots + p_m$$

und

$$\psi(x) = q_0x^n + q_1x^{n-1} + \cdots + q_n$$

teilerfremde Polynome vom Grade m und n und ist

$$F(x) = a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + \cdots + a_{m+n-1}$$

eine ganze Funktion von niederem als $m+n^{\text{ten}}$ Grade, so kann man den Bruch:

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$$

in die Summe zweier Brüche zerlegen:

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)},$$

wo P und Q ganze Funktionen sind, deren Grade niedriger als die der Nenner $\varphi(x)$ bezw. $\psi(x)$ sind.

In der That, eliminiert man aus den $m+n+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_0x^{m+n-1} + a_1x^{m+n-2} + \cdots + a_{m+n-1}\\
x^{n-1}\varphi(x) &= p_0x^{m+n-1} + p_1x^{m+n-2} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi(x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad p_0x^m + \cdots + p_m\\
x^{m-1}\psi(x) &= q_0x^{m+n-1} + q_1x^{m+n-2} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi(x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad q_0x^n + \cdots + q_n
\end{aligned}$$

die $m+n$ Gröfsen

$$x^{m+n-1},\quad x^{m+n-2}, \cdots x^0,$$

die in ihnen linear auftreten, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} F(x), & a_0, & a_1, & \cdots & a_{m+n-1} \\ x^{n-1}\varphi(x), & p_0; & p_1, & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(x), & 0, & 0, & \cdots & p_m \\ x^{m-1}\psi(x), & q_0, & q_1, & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi(x), & 0, & 0, & \cdots & q_n \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man diese Determinante nach der ersten Vertikale, so erhält man:

$$AF(x) + (A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n)\varphi(x) +$$
$$+ (A_{n+1}x^{m-1} + \cdots + A_{m+n})\psi(x) = 0.$$

Die Konstante A ist die Subdeterminante von $F(x)$ und daher nicht null; denn diese ist die nach der Sylvesterschen Methode berechnete Resultante der beiden teilerfremden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Löst man daher die letzte Gleichung nach $F(x)$ auf, so erhält man:

$$F(x) = Q\varphi(x) + P\psi(x),$$

wo P und Q Polynome $n-1^{\text{ten}}$ und $m-1^{\text{ten}}$ Grades sind; daher wird:

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)},$$

w. z. bew. w.

Wendet man diesen Satz mehrmals an, so schliefst man aus einer Zerlegung von $f(x)$ in teilerfremde Faktoren:

$$f(x) = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_n,$$

dafs man den Bruch $\frac{F(x)}{f(x)}$ zerlegen kann in:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_1}{\chi_1} + \frac{P_2}{\chi_2} + \cdots + \frac{P_n}{\chi_n},$$

wo $P_1, P_2, \cdots P_n$ ganze Funktionen sind, deren Grade niedriger als die der entsprechenden Nenner sind. Man erhält daher:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{P_1}{\chi_1}\,dx + \int \frac{P_2}{\chi_2}\,dx + \cdots + \int \frac{P_n}{\chi_n}\,dx.$$

Im Besonderen erkennt man, wenn man die Wurzeln von $f(x)=0$ und mit ihnen die Zerlegung kennt:

$$f(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n},$$

dafs

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{P_1\,dx}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\int\frac{P_2\,dx}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+\cdots$$

wird. Die Integrale auf der rechten Seite kann man in endlicher Form angeben [Nr. 173, 5)].

Es sei in $\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$ der Grad des Zählers um zwei Einheiten geringer als der des Nenners [Nr. 173, 4)], φ und ψ seien teilerfremde Polynome gleichen Grades und man setze:

$$H=\begin{vmatrix}\varphi'(x) & \varphi(x)\\ \psi'(x) & \psi(x)\end{vmatrix},$$

dann ist es bequem $F(x)$ zu zerlegen in:

$$F(x)=AH+Q\varphi(x)+P\psi(x).$$

Man erhält dann

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}=A\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)+\frac{P}{\varphi(x)}+\frac{Q}{\psi(x)},$$

dabei bedeutet A eine Konstante und P und Q sind Polynome, deren Grade wieder um zwei Einheiten geringer sind als die des zugehörigen Nenners. Daher erhält man durch Integration:

$$(*)\quad\int\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}dx=A\log\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\int\frac{P}{\varphi(x)}dx+\int\frac{Q}{\psi(x)}dx.$$

Um z. B. das Integral $\int\frac{A}{BC}dx$ zu zerlegen, wo:

$$\begin{aligned}A&=a_0x^2+2a_1x+a_2,\\ B&=b_0x^2+2b_1x+b_2,\\ C&=c_0x^2+2c_1x+c_2\end{aligned}$$

ist, setze man:

$$H=\begin{vmatrix}b_0x+b_1, & b_1x+b_2\\ c_0x+c_1, & c_1x+c_2\end{vmatrix}=h_0x^2+2h_1x+h_2.$$

Benutzt man die Identität, die sich aus den letzten Gleichungen durch Elimination von x^2, x, x^0 ergiebt:

$$\begin{vmatrix} A & a_0 & a_1 & a_2 \\ H & h_0 & h_1 & h_2 \\ B & b_0 & b_1 & b_2 \\ C & c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

so erhält man

$$A(hbc) - H(abc) + B(ahc) - C(ahb) = 0,$$

wo die Symbole (hbc), $(abc) \cdots$, die Subdeterminanten von $A, H, \cdots$ bedeuten. Hieraus folgt, wenn $(hbc) \neq 0$ ist:

$$\int \frac{A}{BC}\,dx = \frac{(abc)}{(hbc)}\,\frac{1}{2}\log\frac{B}{C} + \frac{(ahb)}{(hbc)}\int\frac{dx}{B} - \frac{(ahc)}{(hbc)}\int\frac{dx}{C}.$$

Wenn der Leser die Theorie der invarianten Bildungen kennt, so erkennt er aus der Formel (*), dafs sich auch die drei Integrale invarianter Eigenschaften erfreuen und dafs auch A, P, Q invariante Bildungen (Invarianten oder Kovarianten) von F, φ und ψ sind.

Wie bereits gesagt, kann man das Integral $\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ nur dann ausführen, wenn man die Wurzeln des Nenners kennt. Man kann jedoch, wenn $f(x)$ vielfache Wurzeln hat, das Integral in einen algebraischen Teil zerlegen und in ein oder mehrere Integrale von gebrochenen Funktionen, deren Nenner lauter einfache Wurzeln hat. In der That, die Algebra lehrt, dafs man durch successive Divisionen solche Polynome $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_m$ erhalten kann, dafs

$$f(x) = \chi_1 \chi_2^{\,2} \chi_3^{\,3} \cdots \chi_m^{\,m}$$

wird; dabei sind $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_m$ paarweise teilerfremd und jedes χ hat nur einfache Wurzeln. Daher erhält man:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P_1}{\chi_1} + \frac{P_2}{\chi_2^{\,2}} + \frac{P_3}{\chi_3^{\,3}} + \cdots + \frac{P_m}{\chi_m^{\,m}}$$

und das gesuchte Integral ist auf eine Summe mehrerer Integrale der Form zurückgeführt:

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx.$$

Es sei χ' die Ableitung von χ und man bestimme zwei Polynome U und V, sodafs:

$$P = U\chi + V\chi'$$

wird. Dies ist auf unendlich viele Arten möglich, solange man keine Voraussetzungen über die Grade von U und V macht. In der That, χ und χ' sind zu einander relativ prim, da χ nur einfache Wurzeln hat. Nach dem bewiesenen Satze kann man also zwei Polynome M und N bestimmen, sodafs:

$$1 = M\chi + N\chi'$$

wird. Multipliziert man diese Gleichung mit P:

$$P = PM\chi + PN\chi'$$

und fügt dazu die Identität:

$$0 = W\chi'\chi - W\chi\chi',$$

wo W irgend ein Polynom ist, so erhält man

$$P = (PM + W\chi')\chi + (PN - W\chi)\chi'$$

oder

$$P = U\chi + V\chi'.$$

Wegen der Willkürlichkeit von W giebt es unendlich viele Polynome U, V.

Man erhält daher:

$$\frac{P}{\chi^n} = \frac{U\chi + V\chi'}{\chi^n} = \frac{U}{\chi^{n-1}} + \frac{V\chi'}{\chi^n}$$

und:

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx = \int \frac{U}{\chi^{n-1}}\,dx + \int \frac{V\chi'}{\chi^n}\,dx.$$

Durch teilweise Integration des zweiten Integrales der rechten Seite erhält man aber:

$$\int \frac{V\chi'}{\chi^n}\,dx = -\frac{V}{(n-1)\chi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{V'}{\chi^{n-1}}\,dx$$

und daher:

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx = -\frac{V}{(n-1)\chi^{n-1}} + \int \frac{U + \frac{1}{n-1}V'}{\chi^{n-1}}\,dx.$$

Auf diese Weise hat man das vorgelegte Integral durch eine rationale Funktion und ein neues Integral ausgedrückt, welches dieselbe Form wie das gegebene hat, in welchem aber der Exponent n um eine Einheit erniedrigt ist. Wiederholt man dasselbe Verfahren bei dem neuen Integrale, so erhält man endlich:

$$\int \frac{P}{\chi^n}\,dx = \text{rationale Funktion von } x + \int \frac{Q}{\chi}\,dx.$$

Führt man dasselbe Verfahren bei allen Integralen aus, in die $\frac{F(x)}{f(x)}$ zerlegt ist, so erhält man:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \text{rationale Funktion von } x + \int \frac{Q_1}{\chi_1}\,dx + \\ + \int \frac{Q_2}{\chi_2}\,dx + \cdots + \int \frac{Q_n}{\chi_n}\,dx$$

und $Q_1,\ Q_2, \cdots Q_n$ sind Polynome.

§ 4. Integration von irrationalen Funktionen.

175. Wenn die zu integrierende Funktion nur eingliedrige Irrationalitäten enthält, das heifst gebrochene Potenzen der Veränderlichen x, so kann man das Differential rational machen durch die Substitution:

$$x = z^n, \quad \text{also} \quad dx = nz^{n-1}\,dz,$$

indem man den Exponenten n so wählt, dafs die Irrationalitäten verschwinden; man braucht dazu nur ein gemeinsames Vielfaches der Nenner zu nehmen. So wird z. B. durch die Substitution $x = z^6$:

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+z^2}{1-z^3}\,6z^5\,dz$$

und es entsteht das Integral einer rationalen Funktion.

In ähnlicher Weise macht man ein Differential rational, das keine anderen Irrationalitäten enthält als gebrochene Potenzen des Binoms $a+bx$ oder der Funktion $\frac{a+bx}{c+dx}$, indem man setzt:

$$a + bx = z^n \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{a+bx}{c+dx} = z^n$$

und indem man den Exponenten so wählt, dafs die Irrationalitäten verschwinden.

176. Ein Differential der Form:

$$f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx,$$

wo f eine rationale Funktion der beiden Veränderlichen ist, kann man durch geeignete Transformationen rational machen.

Man setze:

$$(1) \qquad \sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a} + xz;$$

dann ergiebt sich durch Quadrieren:

$$a + bx + cx^2 = a + 2\sqrt{a}xz + x^2z^2.$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten a und dividiert durch x, so erhält man:

$$b + cx = 2\sqrt{a} \cdot z + xz^2.$$

Da hierin x nur noch in der ersten Potenz auftritt, so erhält man durch Auflösung nach x:

$$x = \frac{2\sqrt{a} \cdot z - b}{c - z^2}$$

und daher:

$$dx = 2 \cdot \frac{c\sqrt{a} - bz + \sqrt{a} \cdot z^2}{(c - z^2)^2}\, dz.$$

Mithin ist das gesuchte Integral:

$$\int f(x, \sqrt{a + bx + cx^2})\, dx =$$

$$\int f\left(\frac{2\sqrt{a} \cdot z - b}{c - z^2},\ \frac{c\sqrt{a} - bz + \sqrt{a} \cdot z^2}{c - z^2}\right) 2\, \frac{c\sqrt{a} - bz + \sqrt{a} \cdot z^2}{(c - z^2)^2}\, dz$$

gleich dem Integral einer rationalen Funktion.

Sind alle im Differentiale auftretende Zahlen reell, so führt diese Substitution eine imaginäre Zahl ein, wenn a negativ ist. Durch eine kleine Abänderung können wir diese Unbequemlichkeit vermeiden.

Das Trinom $a + bx + cx^2$ mufs für einige Werte von x positiv sein, wenn seine Quadratwurzel für irgend welche Werte von x reell ist. Es sei daher x_0 so beschaffen, dafs

$$a + bx_0 + cx_0^2 \geqq 0$$

ist. Dann ergiebt sich aus der Taylorschen Formel:

$$a + bx + cx^2 = a + bx_0 + cx_0^2 + (b + 2cx_0)(x - x_0) + c(x - x_0)^2.$$

Setzt man daher

$$(2) \quad \sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{a + bx_0 + cx_0^2} + (x - x_0)z,$$

so ergiebt sich durch Quadrierung nach gehöriger Vereinfachung:

$$b + 2cx_0 + c(x - x_0) = 2\sqrt{a + bx_0 + cx_0^2} \cdot z + (x - x_0) \cdot z^2.$$

Diese Gleichung ist in x vom ersten Grade und ergiebt daher x als rationale Funktion von z; substituiert man diesen

Wert in (2), so wird auch die Wurzel eine rationale Funktion von z und das gegebene Differential wird rational.

Nimmt man $x_0 = 0$, so entsteht die vorige Substitution; ist x_0 so beschaffen, dafs $a + bx_0 + cx_0^2 = 0$ ist, so setze man:

$$a + bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta).$$

Setzt man dann $x_0 = \alpha$, so hat man die Substitution:

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{c(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)z. \tag{3}$$

Aus ihr ergiebt sich durch Quadrierung und Vereinfachung:

$$c(x - \beta) = (x - \alpha)z^2,$$

eine Gleichung ersten Grades in x.

Man beachte, dafs für $a < 0$, wo die Transformation (1) nicht anwendbar ist, man (3) anwenden kann; denn das Trinom $a + bx + cx^2$ ist negativ für $x = 0$ und positiv für einige Werte von x, es mufs also null werden und reelle Wurzeln besitzen.

Man kann auch setzen:

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{c}x - z \tag{4}$$

und erhält dann:

$$a + bx = z^2 - 2\sqrt{c}xz;$$

dies ist wieder eine Gleichung ersten Grades für x, aus der man x, $\frac{dx}{dz}$ und die Wurzel rational berechnen kann.

177. *Beispiele.*

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$.

Man setze $\sqrt{x^2 + \alpha} = z - x$; man erhält dann:

$$\alpha = -2xz + z^2,$$

also:

$$x = \frac{z^2 - \alpha}{2z}, \quad \sqrt{x^2 + \alpha} = \frac{\alpha + z^2}{2z},$$

$$dx = \frac{z^2 + \alpha}{2z^2}\,dz,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{dz}{z} = \log z + C,$$

und, wenn man endlich für z seinen Wert setzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \log[x + \sqrt{x^2+\alpha}] + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Das Differential läſst sich durch die angegebenen Verfahren rational machen; einfacher bedient man sich der Formel:

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und folgert aus ihr:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Ebenso wird das allgemeine Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\,\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$.

Dies Integral läſst sich auf die vorigen zurückführen mit Hülfe der Substitution:

$$Ax + B = z,$$

aus ihr erhält man:

$$A\,dx = dz, \quad Ax^2 + 2Bx + C = \frac{1}{A}[z^2 + AC - B^2]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{dz}{\sqrt{A(z^2+AC-B^2)}}.$$

Ist daher A positiv, so kann man $\frac{1}{\sqrt{A}}$ vor das Integral nehmen und hat nach Beispiel 1):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log [z + \sqrt{z^2 + AC - B^2}] + \text{Const.}$$

oder, wenn man für z seinen Wert einsetzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{A}} \log [Ax + B + \sqrt{A(Ax^2+2Bx+C)}] + \text{Const.}$$

Ist andererseits A negativ, so treten in dieser Formel imaginäre Zahlen auf. Wir können aber dasselbe Integral erhalten, wenn wir $\frac{1}{\sqrt{-A}}$ als Faktor vor das Integralzeichen nehmen; dann wird:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A(z^2+AC-B^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dz}{\sqrt{(B^2-AC)-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{z}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{Const.}$$

oder:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{Ax+B}{\sqrt{B^2-AC}} + \text{Const.}$$

Hierbei mufs man beachten, dafs $B^2 - AC > 0$ ist; denn da A negativ ist und das Trinom $Ax^2 + 2Bx + C$ für gewisse Werte von x positiv ist, so sind seine Wurzeln reell.

4) Das Integral

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

läfst sich durch die Substitution $x - a = \frac{1}{z}$ auf das vorige zurückführen; man kann es aber auf die zuerst untersuchten Integrale bringen vermittelst der Substitution:

$$z = \frac{Aax + B(a+x) + C}{x-a}.$$

Aus ihr erhält man:

$$x = \frac{az + (Ba + C)}{z - (Aa + B)},$$

$$x - a = \frac{Aa^2 + 2Ba + C}{z - (Aa + B)}, \quad dx = -\frac{Aa^2 + 2Ba + C}{[z-(Aa+B)]^2} dz,$$

$$Ax^2 + 2Bx + C = \frac{(Aa^2 + 2Ba + C)[z^2 + AC - B^2]}{[z-(Aa+B)]^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(Aa^2+2Ba+C)(z^2+AC-B^2)}}.$$

Ist daher $Aa^2 + 2Ba + C > 0$, so hat das zweite Integral den Wert:

$$\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}} \log\left[z + \sqrt{z^2 + AC - B^2}\right] + \text{Const.}$$

Setzt man hierin für z wieder seinen Wert, so wird:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}} \log \frac{Aax+B(a+x)+C+\sqrt{Aa^2+2Ba+C}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}.$$

§ 5. **Binomische Differentiale.**

178. Ein Differential der Form

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

in welchem a und b irgend welche Konstante und die Exponenten m, n, p rationale Zahlen sind, heifst ein *binomisches Differential.*

Durch eine Vertauschung der Veränderlichen kann man das gegebene Differential in ein anderes derselben Form verwandeln, in welchem die an die Stelle von m und n tretenden Exponenten ganz sind. In der That, setzt man:

$$x = z^\alpha,$$

so wird

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p\,dz.$$

Dies ist wieder ein binomisches Differential und die Exponenten von z vor und in der Klammer werden ganz, wenn man α so wählt, dafs $m\alpha$ und $n\alpha$ ganz werden.

Ferner transformiert die Identität:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx$$

das gegebene Differential in ein anderes derselben Form, wo der Exponent von x in der Klammer $-n$ statt n wird; daher wird in einem der beiden Differentiale der Exponent von x in der Klammer positiv. Wir können daher unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dafs m und n ganze Zahlen sind, und dafs n positiv ist.

179. Das vorgelegte Differential ist integrierbar, wenn p eine ganze Zahl ist; denn in diesem Falle ist es eine rationale Funktion von x.

Setzt man:

$$a+bx^n = y,$$

so erhält man:

$$x = \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy$$

und

$$x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb}\,y^p\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dy.$$

Das vorgelegte Differential ist also in ein anderes vom selben Typus transformiert. Dieses und daher auch das gegebene ist integrierbar, wenn der Exponent $\frac{m+1}{n} - 1$ ganz ist, d. h. wenn:

$$\frac{m+1}{n} = \text{ganze Zahl}$$

ist. Wendet man dieses Kriterium auf das Differential an:

$$x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p\,dx,$$

welches eine Transformation des gegebenen ist, so sieht man, dafs man dieses auch dann integrieren kann, wenn $\frac{m+np+1}{n}$ ganz oder

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{ganze Zahl}$$

ist.

Man hat so drei Fälle, in denen man das Integral in endlicher Form angeben kann, das sind diejenigen, in welchen eine der drei Zahlen

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$

eine ganze Zahl ist.

180. Man kann Formeln aufstellen, welche das Integral eines binomischen Differentials mit anderen derselben Art verknüpfen, in denen jedoch die Exponenten m und p andere Werte haben.

Man integriere partiell

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx,$$

indem man als zu integrierenden Faktor $x^m dx$ nimmt und als zu differentiierenden $(a + bx^n)^p$. Setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise:

$$a + bx^n = y,$$

so erhält man:

$$(1) \qquad \int x^m y^p\,dx = \frac{x^{m+1}y^p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1}\int x^{m+n}y^{p-1}\,dx;$$

dabei ist $m + 1 \neq 0$ vorausgesetzt. Diese Formel drückt das gesuchte Integral durch ein anderes aus, in dem m und p beziehungsweise durch $m+n$ und $p-1$ ersetzt sind; sind diese Zahlen einfacher als die früheren, so war die Anwendung der Formel von Nutzen.

Integriert man andrerseits das gegebene Differential partiell, indem man als zu integrierenden Faktor $y^p x^{n-1} dx$ nimmt, dessen Integral $\frac{y^{p+1}}{(p+1)nb}$ ist, so erhält man:

$$(2)\quad \int x^m y^p\, dx = \frac{y^{p+1} x^{m-n+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n+1}{(p+1)nb} \int x^{m-n} y^{p+1} dx.$$

Diese Formel führt das gegebene Differential auf ein anderes zurück, in welchem der Exponent m um n Einheiten vermindert und p um 1 vermehrt ist.

Dieselbe Formel würde man finden, wenn man (1) nach dem Integrale rechter Hand auflösen und $m+n$ und $p-1$ mit m und p vertauschen würde.

Die Formeln (1) und (2) drücken das Integral eines binomischen Differentiales durch ein anderes vom selben Typus aus, in welchem die Exponenten m und p andere Werte erhalten haben. Wir können jedoch aus ihnen andere herleiten, in denen sich nur ein einziger Exponent ändert.

Liest man auf der rechten Seite von (2) an Stelle von y^{p+1}, $y^p(a+bx^n)$ und setzt:

$$\int x^{m-n} y^{p+1} dx = a \int x^{m-n} y^p\, dx + b \int x^m y^p\, dx,$$

so tritt $\int x^m y^p\, dx$ auf beiden Seiten von (2) auf und man erhält:

$$(3)\quad \int x^m y^p\, dx = \frac{x^{m-n+1} y^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} \int x^{m-n} y^p\, dx.$$

Berechnet man aus dieser Gleichung das Integral auf der rechten Seite und setzt $m+n$ an Stelle von m, so erhält man:

$$(4)\quad \int x^m y^p\, dx = \frac{x^{m+1} y^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)} \int x^{m+n} y^p\, dx.$$

Vergleicht man die Formeln (1) und (4) unter einander, so erhält man eine Relation zwischen den Integralen

$$\int x^{m+n} y^{p-1} dx \quad \text{und} \quad \int x^{m+n} y^p\, dx.$$

Löst man die Gleichung nach dem zweiten Integrale auf und liest $m-n$ statt m, so erhält man die Formel:

$$(5)\quad \int x^m y^p dx = \frac{x^{m+1}y^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np}\int x^m y^{p-1}dx.$$

Löst man endlich diese Gleichung nach dem zweiten Integrale auf und setzt $p+1$ für p, so erhält man:

$$(6)\quad \int x^m y^p dx = -\frac{x^{m+1}y^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+np+n}{n(p+1)a}\int x^m y^{p+1}dx.$$

Die Formeln (3) und (4) gestatten den Exponenten von m um n Einheiten zu vermehren oder zu verringern. Durch mehrmalige Anwendung von ihr transformiert sich daher das gegebene Integral in ein anderes, in welchem an Stelle von m getreten ist $m \pm k$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die Formeln (5) und (6) gestatten den Exponenten p um eine Einheit zu vermehren oder zu vermindern, ihre wiederholte Anwendung führt daher das gegebene Integral auf ein anderes zurück, in welchem $p \pm k'$ an Stelle von p steht, wo k' irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Die Formeln (1) bis (6) werden illusorisch, wenn die auftretenden Nenner null sind. Dies tritt ein, wenn

$$m+1=0, \quad \text{oder} \quad p+1=0 \quad \text{oder} \quad m+1+np=0$$

ist. Aber dann hat man bezüglich:

$$\frac{m+1}{n}=0, \quad p=-1, \quad \frac{m+1}{n}+p=0$$

und wir kommen auf Fälle, deren Integrierbarkeit wir bereits erkannt haben.

181. *Beispiele.* Es sei das Integral vorgelegt $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. In diesem besonderen Falle wird die Formel (3):

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist daher m ganz und positiv, so wird es jedesmal um zwei Einheiten durch Anwendung dieser Formel verkleinert und wir kommen schließlich bei ungeradem m auf $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; dieses ergiebt bei Anwendung derselben Reduktionsformel:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

da das Integral auf der rechten Seite verschwindet. Ist aber m gerade, so kommen wir schliefslich auf $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$.

Gesucht sei ferner:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Anwendung der Formel (4) oder (6) erhält man sofort:

$$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}.$$

Ein Differential der Form

$$x^q(ax^r + bx^s)^p\, dx$$

kann man auf den Typus der behandelten binomischen Differentiale zurückführen, indem man es so schreibt:

$$x^{q+pr}(a + bx^{s-r})^p\, dx.$$

§ 6. **Integrale transcendenter Funktionen.**

182. Manche transcendente Funktionen lassen sich unmittelbar integrieren, indem man die Formeln benutzt (Nr. 40 und 42)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}, \quad \int \cos x\, dx = \sin x, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x, \quad \text{u. s. w.}$$

Andere transcendente Differentiale lassen sich auf rationale Differentiale durch geeignete Wahl der Veränderlichen zurückführen. Kann man z. B. das gegebene Integral auf die Form bringen:

$$\int f(u)u'dx,$$

wo f eine rationale Funktion von x, und u eine transcendente Funktion, u' ihre Ableitung ist, so kommt dies bei Benutzung der Veränderlichen u auf

$$\int f(u)\, du$$

zurück, welches das Integral einer rationalen Funktion ist.

183. **Das Integral:**

$$\int f(e^{ax})\,dx,$$

in welchem f eine rationale Funktion ist, läſst sich in das Integral einer rationalen Funktion transformieren, wenn man setzt:

$$e^{ax} = z.$$

Dann wird

$$x = \frac{1}{a}\log z, \quad dx = \frac{dz}{az}$$

und daher

$$\int f(e^{ax})\,dx = \int f(z)\,\frac{dz}{az}.$$

Es sei z. B. $\int \frac{dx}{1+e^x}$ gesucht. Setzt man $e^x = z$, so wird dies:

$$\int \frac{dz}{z(1+z)} = \log z - \log(1+z)$$

oder

$$= x - \log(1+e^x).$$

184. **Das Integral**

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

wo f eine rationale Funktion ist, läſst sich auf das vorige zurückführen, wenn man $\sin x$ und $\cos x$ durch die imaginären Exponentialausdrücke ersetzt und das Differential wird dann eine rationale Funktion von e^{ix}.

Man kann es aber auch rational machen ohne imaginäre Gröſsen zu Hülfe zu nehmen, wenn man setzt:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z,$$

woraus man erhält:

$$\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = 2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x =$$

$$= \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

woraus folgt:

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

Das Differential auf der rechten Seite ist jetzt rational.

In besonderen Fällen kann man einfachere Transformationen benutzen. Läſst sich das gegebene Integral auf die Form bringen

$$\int f(\operatorname{tang} x)\,dx,$$

so braucht man nur $\operatorname{tang} x = z$ zu setzen; dann wird $x = \operatorname{arc\,tg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$ und:

$$\int f(\operatorname{tang} x)\,dx = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\,dz.$$

Dies wird immer eintreten, wenn in dem Differentiale nur gerade Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ auftreten; denn dann ist:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tang}^2 x}{1+\operatorname{tang}^2 x},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 x}.$$

Läſst sich das gegebene Integral auf die Form bringen

$$\int f(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x\,dx,$$

wo f eine rationale Funktion ist, so braucht man nur $\sin x = z$ zu setzen und das Integral wird:

$$\int f(z,\ 1-z^2)\,dz.$$

Läſst es sich auf die Form bringen

$$\int f(\sin^2 x,\ \cos x)\sin x\,dx,$$

so wird es durch die Substitution $\cos x = z$:

$$-\int f(1-z^2,\ z)\,dz.$$

185. Gesucht sei:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx.$$

Sind m und n ganze Zahlen, so ist das Differential eine rationale Funktion des Sinus und Cosinus und läſst sich daher in geschlossener Form durch die Methoden der vorigen Nummer berechnen. Setzt man $\sin x = z$, so wird

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dz.$$

Auf der rechten Seite steht jetzt ein binomisches Differential und dieses läſst sich integrieren, wenn eine der Zahlen

$$\frac{n-1}{2},\quad \frac{m+1}{2},\quad \frac{m+n}{2}$$

ganz ist, was gewiſs der Fall ist, wenn m und n ganz sind.

Auf jeden Fall ist es jedoch nützlich den absoluten Wert der Exponenten m und n zu erniedrigen, was durch Reduktionsformeln ermöglicht wird.

Man zerlege das zu integrierende Differential in:

$$\sin^m x \cos x\,dx \cdot \cos^{n-1} x$$

und integriere partiell, indem man den ersten Faktor als zu integrierenden Faktor nimmt. Man erhält:

$$(1)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \\ + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx.$$

Integriert man hingegen teilweise, nachdem man das Differential in das Produkt zerlegt hat:

$$\sin^{m-1} x \cdot \cos^n x \sin x\,dx,$$

so erhält man

$$(2)\qquad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \\ + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx.$$

Berücksichtigt man in der Formel (1) die Identität:

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx = \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} dx = \\ = \int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx - \int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

und löst die Gleichung dann nach dem auf beiden Seiten auftretenden vorgelegten Integrale auf, so erhält man:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx \tag{3}$$

und in ähnlicher Weise erhält man aus der Formel (2):

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx. \tag{4}$$

Löst man die Gleichung (3) nach dem Integrale auf der rechten Seite auf, und vermehrt n um zwei Einheiten, so erhält man:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x\,dx. \tag{5}$$

In ähnlicher Weise erhält man aus (4):

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x\,dx. \tag{6}$$

Die vorigen Formeln könnte man auch auf verschiedene andere Weisen erhalten. Vertauscht man z. B. x mit $\frac{\pi}{2} - x$, so vertauschen sich die Formeln (1) und (2), (3) und (4), (5) und (6) untereinander. Die letzten vier gestatten einen der Exponenten m und n um zwei Einheiten zu erhöhen, ohne den anderen zu ändern. Die Formeln (3) und (4) werden illusorisch, wenn $m + n = 0$ wird. In diesem Falle kann man (1) und (2) anwenden. Reduziert man so die Exponenten m und n gleichzeitig um je zwei Einheiten, so werden sie schliefslich, wenn sie ganz waren, die Werte 1 oder 0 oder -1 annehmen und wir werden so auf folgende neun Integrale geführt, die wir direkt berechnen:

$$\int dx = x,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x,$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x,$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \log \sin x,$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\log \cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \log \operatorname{tang} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \int \frac{d \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

186. Einige andere Differentiale, die man durch die Substitutionen der Nr. 184 rational machen kann, lassen sich auch direkt durch geeignete Kunstgriffe integrieren.

1) Gesucht sei

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}.$$

Bestimmt man zwei Zahlen r und α, sodafs

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

wird, so erhält man:

$$a \cos x + b \sin x = r(\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = r \cos(x - \alpha)$$

und daher wird:

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{r}\int \frac{d(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)} = \frac{1}{r} \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-\alpha}{2}\right) + C.$$

2) Gesucht sei

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $\cos^2 x$, so kommt:

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + b \operatorname{tang}^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{a + b \operatorname{tang} x}$$

und dieses letzte Differential ist rational, wenn man $\operatorname{tang} x$ als unabhängige Veränderliche nimmt.

3) Man betrachte:

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

Beachtet man, dafs

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x \quad \text{und} \quad 1 = \cos^2 \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{1}{2} x$$

ist, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{a\left(\cos^2 \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{1}{2} x\right) + b\left(\cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x\right)} =$$

$$= 2 \int \frac{d \frac{1}{2} x}{(a+b) \cos^2 \frac{1}{2} x + (a-b) \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

und man kommt auf das vorige Integral zurück.

4) Gesucht sei:

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}.$$

Setzt man wieder $b = r \cos \alpha$, $c = r \sin \alpha$, so wird das vorgelegte Integral:

$$\int \frac{dx}{a + r \cos (x - \alpha)} = \int \frac{d(x - \alpha)}{a + r \cos (x - \alpha)}$$

und ist daher auf das vorige Integral zurückgeführt.

187. Das Integral

$$\int e^{ax} x^n \, dx$$

läfst sich durch teilweise Integration vereinfachen. Nimmt man $e^{ax} dx$ als zu integrierenden Faktor, so folgt:

$$\int e^{ax} x^n \, dx = \frac{e^{ax}}{a} x^n - \frac{n}{a} \int e^{ax} x^{n-1} dx$$

und das vorgelegte Integral kommt also auf ein ähnliches zurück, in welchem aber der Exponent n von x um eine

Einheit gesunken ist. Ist n ganz und positiv, so wird man durch mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens schliefslich zurückgeführt auf

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

und daher läfst sich dann auch das vorgelegte Integral berechnen.

Setzt man der Einfachheit halber $a = -1$, so findet man:

$$\int e^{-x}x^n\,dx = -n!\,e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right] + C.$$

Ist hingegen n negativ, so kann man die oben aufgestellte Reduktionsformel nach dem auf der rechten Seite auftretenden Integrale auflösen; man kann aber auch teilweise integrieren und das gegebene Differential in das Produkt zerlegen:

$$e^{ax} \cdot x^n\,dx;$$

man erhält dann:

$$\int e^{ax}x^n\,dx = \frac{e^{ax}x^{n+1}}{n+1} - \frac{a}{n+1}\int e^{ax}x^{n+1}\,dx, \quad n+1 \neq 0.$$

Daher kann man zu n so viele Einheiten hinzufügen als man will. Ist n ganz und negativ, so kommt man durch Addition von mehreren Einheiten auf den Wert $n = -1$ und somit auf das Integral:

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx,$$

auf welches die vorige Formel nicht anwendbar ist. Dieses Integral läfst sich nicht in geschlossener Form ausdrücken.

188. Setzt man in $\int e^{ax}x^n\,dx$

$$e^x = z, \quad x = \log z, \quad dx = \frac{dz}{z},$$

so erhält man:

$$\int e^{ax}x^n\,dx = \int z^{a-1}(\log z)^n\,dz.$$

Das zweite Integral kann man berechnen, wenn man das erste berechnen kann, also wenn n ganz und positiv ist.

Setzt man $e^{ax} = z$, so transformiert sich die Funktion $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$ in

$$\int \frac{dz}{\log z}.$$

Diese Funktion heifst der Integrallogarithmus. Man kann ihn schreiben:

$$\int \frac{dz}{\int \frac{dz}{z}} = \int \frac{dz}{\int \frac{dz}{\int dz}}.$$

Setzt man in demselben Integrale a komplex und gleich $g + hi$, so wird $e^{ax} = e^{gx} (\cos hx + i \sin hx)$ und

$$\int e^{ax} x^n dx = \int e^{gx} x^n \cos hx\, dx + i \int e^{gx} x^n \sin hx\, dx.$$

Ist daher n eine ganze positive Zahl, so kann man die linke Seite berechnen und erhält daraus die Werte der beiden Integrale:

$$\int e^{gx} x^n \cos hx\, dx \quad \text{und} \quad \int e^{gx} x^n \sin hx\, dx.$$

Setzt man im Besonderen $n = 0$, so wird

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

und, wenn man $a = g + hi$ setzt:

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx + i \int e^{gx} \sin hx\, dx = \frac{e^{gx}(\cos hx + i \sin hx)}{g + hi}$$

$$= \frac{e^{gx}[g \cos hx + h \sin hx + i(g \sin hx - h \cos hx)]}{g^2 + h^2},$$

also wird

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + h^2} (g \cos hx + h \sin hx),$$

$$\int e^{gx} \sin hx\, dx = \frac{e^{gx}}{g^2 + h^2} (g \sin hx - h \cos hx).$$

Hierzu braucht man nur die willkürlichen Konstanten hinzuzufügen, um die allgemeinen Integrale zu erhalten.

Übrigens kann man diese Integrale direkt durch teilweise Integration ermitteln. In der That, bringt man die Differentiale auf die Formen:

$$e^{gx} dx \cdot \cos hx \quad \text{und} \quad e^{gx} dx \cdot \sin hx,$$

so hat man:

$$\int e^{gx} \cos hx\, dx = \frac{1}{g} e^{gx} \cos hx + \frac{h}{g} \int e^{gx} \sin hx\, dx.$$

Ebenso wird

$$\int e^{gx} \sin hx\, dx = \frac{1}{g} e^{gx} \sin hx - \frac{h}{g} \int e^{gx} \cos hx\, dx$$

und man erhält zwei Gleichungen für die gesuchten Integrale.

Ein anderer besonderer Fall von den vorstehenden Integralen ist dieser:

$$\int x^n \cos x\, dx \quad \text{und} \quad \int x^n \sin x\, dx,$$

welche sich für $g = 0$, $h = 1$ ergeben. Die Reduktionsformeln kann man jedoch direkt durch teilweise Integration erhalten. In der That hat man:

$$\int x^n \cos x\, dx = + x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx,$$

$$\int x^n \sin x\, dx = - x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx.$$

So reduziert sich das vorgelegte Paar von Integralen auf ein anderes vom selben Typus, in welchem $n - 1$ an Stelle von n zu setzen ist. Ist daher n ganz und positiv, so kommt man durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens auf die bekannten Integrale:

$$\int \cos x\, dx, \quad \int \sin x\, dx.$$

Setzt man $\sin x = z$, so hat man:

$$\int x^n \cos x\, dx = \int (\text{arc} \sin z)^n\, dz$$

und setzt man $\cos x = z$, so wird:

$$\int x^n \sin x\, dx = - \int (\text{arc} \cos z)^n\, dz.$$

Daher kann man auch diese Integrale berechnen, wenn n ganz und positiv ist.

189. Man kann die Integrale der Form berechnen:

$$\int f(x, e^{ax}, e^{bx}, \cdots e^{kx})\, dx,$$

wenn f eine ganze rationale Funktion ist. In der That, f zerlegt sich in eine Summe von mehreren Gliedern, deren jedes das Produkt aus einer numerischen Konstanten, einer Potenz von x und einigen Potenzen von e^{ax}, e^{bx}, $\cdots$ ist. Vereinigt man in ihm die Exponentialglieder, so wird man darauf geführt, eine Reihe von Integralen vom Typus

$$\int x^m e^{px}\, dx$$

zu berechnen, wo m eine ganze positive Zahl ist und diese Integrale kann man ausführen (Nr. 187).

Die Integration einer ganzen Funktion von x, von den Exponentialgröfsen e^{ax}, e^{bx}, $\cdots$ und von Sinus und Cosinus linearer Funktionen von x läfst sich auf den vorigen Fall zurückführen, wenn man für die Sinus und Cosinus ihre Exponentialausdrücke setzt.

Das Integral

$$\int f(x)\, e^{ax}\, dx,$$

wo f eine rationale Funktion von x ist, drückt sich, wenn man $f(x)$ in eine ganze Funktion und Partialbrüche zerlegt, durch eine Reihe von Integralen der Form aus:

$$\int x^m e^{ax}\, dx \quad \text{und} \quad \int \frac{e^{ax}}{(x-\alpha)^n}\, dx,$$

wo m und n ganze positive Zahlen sind. Zufolge der Formel der Nr. 187 kann man das erste Integral berechnen; das zweite geht durch die Substitution $x - \alpha = z$ über in $e^{a\alpha}\int z^{-n} e^{az}\, dz$, welches sich durch bekannte Funktionen und den Integrallogarithmus ausdrücken läfst.

Die Integrale

$$\int f(x) \sin ax\, dx, \quad \int f(x) \cos ax\, dx$$

lassen sich auf das vorhergehende zurückführen, wenn man die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen ersetzt.

Achtes Kapitel.

Bestimmte Integrale.

§ 1. Definition des bestimmten Integrales.

190. Es sei $f(x)$ eine Funktion, welche in einem die Werte a und b enthaltenden Intervalle ein unbestimmtes Integral $F(x)$ und daher deren unendlich viele von der Form $F(x) + C$ besitzt, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Erteilt man der Veränderlichen erst den Wert a, dann den Wert b, so erfährt dabei irgend eines dieser Integrale den Zuwachs

$$F(b) - F(a),$$

dieser ist daher unabhängig von der Wahl des partikularen Integrales, mit dessen Hilfe man ihn berechnet. Man nennt diese Differenz das *bestimmte Integral* von $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b; man bezeichnet es durch $\int_a^b f(x)\,dx$ und liest dies: *Integral von a bis b von* $f(x)\,dx$. Nach der Definition wird daher, wenn $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Die Zahlen a und b heifsen beziehungsweise die *untere Grenze* und die *obere Grenze* des Integrales.

Beispiele. — 1) Man sucht $\int_0^1 x^m dx$ für $m > 0$. Die Funktion $F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ist ein unbestimmtes Integral von $x^m\,dx$ in dem ganzen Intervalle (0, 1) und allgemein für alle positiven Werte von x. Daher ist: $F(1) = \frac{1}{m+1}$, $F(0) = 0$ und es wird:

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\cdot$$

2) Man hat $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x$, wenn man, wie gewöhnlich, unter $\operatorname{arc\,tang} x$ den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen versteht, dessen Tangente x ist. Man schliefst daraus:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

3) Man sucht $\int_a^b \frac{dx}{x}\cdot$ Sind a und b beide positiv, so kann man $F(x) = \log x$ setzen; denn dann hat die Funktion $\log x$ in dem ganzen Intervalle (a, b) die Ableitung $\frac{1}{x}\cdot$ Daher wird:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}\cdot$$

Sind a und b beide negativ, so setze man $F(x) = \log(-x)$, dann wird:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log(-b) - \log(-a) = \log \frac{b}{a},$$

wie zuerst. Ist endlich eine der Grenzen a und b positiv, die andere negativ, so hat die Funktion $\frac{1}{x}$ in dem Intervalle (a, b) nicht immer einen bestimmten endlichen Wert und man kann in ihm weder von einem bestimmten noch von einem unbestimmten Integrale sprechen; der Ausdruck $\int_a^b \frac{dx}{x}$ hat in diesem Falle nach den gegebenen Definitionen keine Bedeutung.

191. Aus der Definition des bestimmten Integrales leitet man unmittelbar die folgenden Sätze ab:

I. *Vertauscht man in einem bestimmten Integrale die Grenzen, so ändert das bestimmte Integral sein Zeichen, aber nicht seinen absoluten Wert.*

In der That, ist $F(x)$ ein Integral von $f(x)\,dx$, so hat man nach der Definition:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

und

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

und daher

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

w. z. bew. w.

Durch diese Vertauschung kann man es immer erreichen, dafs die untere Grenze nicht gröfser ist als die obere; dies werden wir in verschiedenen Fällen voraussetzen.

II. *Besitzt $f(x)\,dx$ in einem die Werte a, b, c enthaltenden Intervalle ein Integral $F(x)$, so wird:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

In der That, diese Formel ist gleichbedeutend mit der Identität

$$F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)].$$

In ähnlicher Weise hat man, wenn $f(x)$ in einem die Werte $x_0, x_1, \cdots x_n$ enthaltenden Intervalle ein Integral besitzt:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

III. *Besitzt $f(x)$ ein Integral in dem Intervalle (a, b), so hat man:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(x_1),$$

wo x_1 eine Zahl zwischen a und b ist.

In der That, diese Formel ist gleichbedeutend mit der aus der Differentialrechnung:

$$F(b) - F(a) = (b - a)\, F'(x_1).$$

Korollar. *Wenn in dem Intervalle* (a, b), $f(x) > 0$ *und* $a < b$ *ist, so hat man auch:*

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

In der That, nach der letzten Formel hat das Integral den Wert $(b - a) f(x_1)$ und dieser ist positiv, da $b - a > 0$ und $f'(x_1) > 0$.

Korollar. *Hat man in dem Intervalle* (a, b), $\varphi(x) > \psi(x)$, *und ist* $a < b$, *so hat man auch:*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx > \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

In der That, es ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx.$$

Dieses letzte Integral ist aber positiv nach dem vorhergehenden Korollar.

IV. *Besitzen die Funktionen* $\varphi(x)$ *und* $\psi(x)$ *in dem Intervalle* (a, b) *ein Integral und wird* $\psi(x)$ *in demselben Intervalle nicht null, so hat man:*

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\, dx = \varphi(x_1) \int_a^b \psi(x)\, dx,$$

wo x_1 *ein Wert zwischen* a *und* b *ist.*

In der That, setzt man:

$$F(x) = \int \varphi(x)\,\psi(x)\, dx, \quad \Psi(x) = \int \psi(x)\, dx,$$

so hat man, da $\Psi'(x) = \psi(x)$ in dem Intervalle (a, b) nicht verschwindet:

$$\frac{F(b) - F(a)}{\Psi(b) - \Psi(a)} = \frac{F'(x_1)}{\Psi'(x_1)}$$

oder

$$\frac{\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \psi(x)\,dx} = \frac{\varphi(x_1)\,\psi(x_1)}{\psi(x_1)} = \varphi(x_1)$$

und hieraus erhält man die zu beweisende Formel.

192. *Satz. Besitzt die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) ein Integral und nennt man:*

$$x_0 = a, \quad x_1, \; x_2, \; \cdots \; x_{n-1}, \; x_n = b$$

eine willkürliche Reihe von Werten x, die nach ihrer Gröfse geordnet sind; nennt man ferner $l(\alpha, \beta)$ und $\lambda(\alpha, \beta)$ die obere und untere Grenze der Werte von $f(x)$ in dem Intervalle (α, β), so ist das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ immer zwischen den zwei Summen enthalten:

$$s_1 = (x_1 - x_0)\,l(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,l(x_1, x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\,l(x_{n-1}, x_n)$$

und

$$s_2 = (x_1 - x_0)\,\lambda(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,\lambda(x_1, x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\,\lambda(x_{n-1}, x_n),$$

welches auch die Werte $x_1, x_2, \cdots$ sein mögen.

Ist die Funktion $f(x)$ stetig, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ die einzige Zahl, welche zwischen allen Werten von s_1 und s_2 enthalten ist, wie auch die zwischen a und b interpolierten Werte beschaffen sein mögen.

In der That, man hat (Formel II)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

und daher wird nach Formel III:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (x_1 - x_0)\,f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\,f(\xi_n),$$

wo $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ Werte von x sind, die beziehungsweise den Intervallen angehören:

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n).$$

Daher hat man die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} l(x_0, x_1) &> f(\xi_1) > \lambda(x_0, x_1), \\ l(x_1, x_2) &> f(\xi_2) > \lambda(x_1, x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l(x_{n-1}, x_n) &> f(\xi_n) > \lambda(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Multipliziert man jetzt diese Ungleichungen beziehungsweise mit den Differenzen $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \cdots x_n - x_{n-1}$, die sämtlich dasselbe Vorzeichen haben, und addiert, so erhält man, wenn alle diese Differenzen positiv sind, d. h. wenn $a < b$ ist:

$$s_1 > \int_a^b f(x)\,dx > s_2,$$

und wenn $a > b$ ist:

$$s_1 < \int_a^b f(x)\,dx < s_2.$$

Hiermit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Die Differenz $s_1 - s_2$ kann man schreiben:

$$s_1 - s_2 = (x_1 - x_0)\,\vartheta\,(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,\vartheta\,(x_1, x_2) + \cdots \\ + (x_n - x_{n-1})\,\vartheta\,(x_{n-1}, x_n),$$

wenn man mit $\vartheta(\alpha, \beta) = l(\alpha, \beta) - \lambda(\alpha, \beta)$ die Schwankung der Funktion f im Intervalle (α, β) bezeichnet.

Ist nun die Funktion $f(x)$ stetig in dem Intervalle (a, b), so kann man dieses Intervall in der Weise in Teile teilen, dafs in jedem einzelnen von ihnen die Schwankung kleiner als eine beliebig fixierte positive Zahl ε ist (Nr. 21). Daher kann man die Differenz $s_2 - s_1$ kleiner als $\varepsilon(b - a)$, also auch kleiner als jede vorgeschriebene Zahl machen.

Deswegen kann es nur einen einzigen zwischen s_1 und s_2 enthaltenen Wert geben und da $\int_a^b f(x)\,dx$ diese Eigenschaft hat, so schliefst man, dafs dies die einzige Zahl ist, die zwischen allen Werten s_1 und s_2 enthalten ist.

Korollar. *Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ der Grenzwert, gegen welchen bei wachsendem n die Summe konvergiert:*

$$s = (x_1 - x_0)\,f(z_1) + (x_2 - x_1)\,f(z_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\,f(z_n),$$

in welcher $x_0 = a$, $x_1, x_2, \cdots x_n = b$ der Gröſse nach geordnete Werte von x und $z_1, z_2, \cdots z_n$ willkürliche Werte von x sind, die den Intervallen (x_0, x_1), (x_1, x_2), $\cdots$ (x_{n-1}, x_n) angehören.

In der That, man fixiere eine beliebig kleine positive Zahl, die durch $\varepsilon\,(b - a)$ bezeichnet sein möge, und bestimme eine positive Zahl h so, daſs zu irgend zwei Werten von x, deren Differenz kleiner als h ist, zwei Funktionswerte gehören, die sich um weniger als ε unterscheiden. Teilt man nun das Intervall (a, b) in beliebig viele Intervalle, deren jedes kleiner als h ist, so erhält man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_0^{n-1}{}_r\,(x_{r+1} - x_r)\,f(\xi_{r+1}),$$

wo ξ_{r+1} ein bestimmter Wert von x in dem Intervalle (x_r, x_{r+1}) ist. Daher wird die Differenz zwischen der Summe s und dem Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx - s = \sum_0^{n-1}{}_r\,(x_{r+1} - x_r)\,[f(\xi_{r+1}) - f(z_{r+1})].$$

Da nun ξ_{r+1} und z_{r+1} demselben Intervalle (x_r, x_{r+1}) angehören, dessen Ausdehnung kleiner als h ist, so ist auch ihre Differenz kleiner als h und $|\,f(\xi_{r+1}) - f(z_{r+1})\,| < \varepsilon$. Daher wird auch $\left|\int_a^b f(x)\,dx - s\right| < \varepsilon\,(b - a)$. Man kann also zu einer beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon\,(b - a)$ eine Zahl h bestimmen, sodaſs für jede Teilung des Intervalles (a, b) in Teilintervalle, deren jedes kleiner als h ist, die Differenz zwischen der Summe s und dem Integrale absolut kleiner als $\varepsilon\,(b - a)$ wird; also hat s zum Grenzwerte das Integral, wenn alle Intervalle gegen null konvergieren oder n unendlich groſs wird.

193. Die vorigen Sätze liefern eine neue Definition des bestimmten Integrales, welche mit der bereits gegebenen zwar nicht gänzlich gleichwertig ist, die aber doch in den gewöhnlichen Fällen mit ihr zusammenfällt.

Es sei $f(x)$ eine Funktion, welche in dem Intervalle (a, b) gegeben ist und es sei z. B. $a < b$. Wir wollen die Existenz der oberen und der unteren Grenze der Werte von $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) und in jedem seiner Teilintervalle voraussetzen.

Man nenne wieder $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots x_n = b$ willkürliche wachsende Werte von x, und $l(\alpha, \beta)$ und $\lambda(\alpha, \beta)$ die obere und untere Grenze der Werte von $f(x)$ in dem Intervalle (α, β) und betrachte die Summen:

$$s_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, l(x_r, x_{r+1})$$

und

$$s_2 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, \lambda(x_r, x_{r+1}),$$

in denen r alle ganzen Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchläuft.

Es ist leicht zu sehen, dafs jede Summe s_1 gröfser ist als jede Summe s_2; daher giebt es eine untere Grenze S_1 der Werte von s_1 und eine obere Grenze S_2 der Werte von s_2 und es ist $S_1 \geqq S_2$.

Ist $S_1 = S_2$, so ist der gemeinsame Wert beider Summen die einzige Zahl, die kleiner ist als alle Summen s_1 und gröfser als alle Summen s_2. In diesem Falle nennen wir $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ihren gemeinsamen Wert und sagen — in dieser Nummer wenigstens —, dafs die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) *integrierbar* ist.

Besitzt $f(x)$ ein unbestimmtes Integral, d. h. giebt es eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, so ist nach dem Satze der vorigen Nummer $F(b) - F(a)$ auch kleiner als alle Summen s_1 und gröfser als alle s_2. Ist daher $S_1 = S_2$, so folgt:

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Die beiden Definitionen des bestimmten Integrales, nämlich die in Nr. 190 und die in dieser Nummer gegebene fallen daher zusammen, wenn beide anwendbar sind. Es könnte sich aber ereignen, dafs eine Funktion $F(x)$ existiert, deren Ableitung $f(x)$ ist, ohne dafs die obere und untere Grenze der Werte von $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) existiert; es können aber auch diese Grenzen vorhanden sein ohne dafs $S_1 = S_2$ wird und dann ist zwar die erste Definition anwendbar, aber nicht die zweite. Umgekehrt könnte $S_1 = S_2$ sein ohne dafs es eine Funktion giebt, deren Ableitung $f(x)$ ist und dann ist zwar die zweite Definition anwendbar, aber nicht die erste.

Man beachte, dafs die Differenz $S_1 - S_2$ gleich der unteren Grenze der Werte von $\Delta = \Sigma(x_{r+1} - x_r)\,\delta(x_r, x_{r+1})$ ist, wo $\delta(\alpha, \beta)$ die Schwankung der Funktion in dem Intervalle (α, β), d. h. die Differenz $l(\alpha, \beta) - \lambda(\alpha, \beta)$ bedeutet. Daher gilt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) integrierbar ist (d. h. dafs $S_1 = S_2$ ist nach der neuen Bezeichnung), besteht darin, dafs die untere Grenze der Werte von Δ null ist.

Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) immer wächst oder immer abnimmt oder wenn man das Intervall (a, b) in Teilintervalle zerlegen kann, in deren jedem $f(x)$ immer in demselben Sinne variiert, so ist sie in dem Intervalle (a, b) integrierbar.

In der That, wächst $f(x)$, so zerlege man (a, b) in n gleiche Teile, deren jeder gleich $h = \frac{b-a}{n}$ ist. Dann wird $\delta(x_r, x_{r+1}) = f(x_{r+1}) - f(x_r)$ und $\Delta = h[f(b) - f(a)]$ und diesen Ausdruck kann man so klein machen wie man will, wenn man h hinreichend klein nimmt. Ein ähnlicher Beweis gilt in den anderen Fällen.

Ist $f(x)$ stetig, so ist es auch integrierbar.

Diese Behauptung folgt aus dem Satz Nr. 192.

Ist $f(x)$ unstetig für eine endliche Zahl von Werten in dem Intervalle (a, b) oder nimmt man allgemeiner aus dem Intervalle (a, b) irgend welche Intervalle heraus, deren Summe man beliebig klein machen kann, und ist für alle übrig bleibenden Werte von x die Funktion stetig, so ist sie integrierbar.

In der That, man zerlege das Intervall (a, b) in die Intervalle, in denen $f(x)$ unstetig ist und deren Summe kleiner als ε

ist, und teile die übrig bleibenden Intervalle beliebig. Dann zerlege man die Summe Δ in zwei Teile; der eine entspreche den ersten Intervallen, dieser ist dann kleiner als $\varepsilon[l(a, b) - \lambda(a, b)]$, eine beliebig kleine Gröfse. Der andere Teil von Δ entspreche den Intervallen, in denen die Funktion stetig ist; dieser kann ebenfalls beliebig klein gemacht werden. Daher kann man auch Δ kleiner als jede gegebene Gröfse machen und die Funktion ist integrierbar.

Schliefslich war in dieser Nummer vorausgesetzt, dafs die untere Grenze des bestimmten Integrales kleiner ist als die obere Grenze. Ist dies nicht der Fall, so kann man das Integral durch die Gleichung

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

definieren.

Es sind auch leicht die Formeln zu beweisen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

und, wenn $a < b$ ist:

$$(b-a)\,l(a, b) > \int_a^b f(x)\,dx > (b-a)\,\lambda(a, b).$$

Ist $a > b$, so müssen die Zeichen der Ungleichung umgekehrt werden.

Man betrachte jetzt das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze und setze:

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx.$$

Dann wird $F(X+h) - F(X) = \int_X^{X+h} f(x)\,dx$ und dieser Wert ist zwischen $hl(X, X+h)$ und $h\lambda(X, X+h)$ enthalten. Da nun l und λ endlich sind, so konvergieren diese mit h gegen null; $F(X)$ ist also eine stetige Funktion.

Ferner erhält man aus der Ungleichung:

$$hl(X, X+h) > F(X+h) - F(X) > h\lambda(X, X+h),$$

die für $h > 0$ gilt und aus der, welche für $h < 0$ gilt und die sich aus dieser durch Umkehr der Ungleichheitszeichen ergiebt, dafs in jedem Falle:

$$l(X, X+h) > \frac{F(X+h) - F(X)}{h} > \lambda(X, X+h)$$

ist. Man lasse hierin h gegen null konvergieren. Ist $f(x)$ stetig an der Stelle $x = X$, so wird:

$$\lim l(X, X+h) = \lim \lambda(X, X+h) = f(X)$$

und daher:

$$\lim \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = f(X).$$

Also hat $F(X)$ zur Ableitung $f(X)$ an allen den Stellen, wo $f(X)$ stetig ist.

§ 2. Anwendung der bestimmten Integrale auf die Geometrie.

194. Viele geometrische Gröfsen, wie Flächeninhalte, Volumina, Kurvenbögen u. s. w. werden durch bestimmte Integrale gemessen.

Es ist aber nützlich, genau zu fixieren, durch welche Axiome, Postulate und Definitionen wir dazu gelangen können, auf die Gleichheit oder Ungleichheit zweier nicht vergleichbarer Gröfsen zu schliefsen und zu finden, dafs eine bestimmte Zahl eine gegebene Gröfse mifst.

Um die Gleichheit oder Ungleichheit zweier geometrischer Gröfsen zu erkennen, bedienen wir uns der folgenden Annahmen:

1) *Zwei vergleichbare Gröfsen sind gleich.*

2) *Durch Addition oder Subtraktion gleicher Gröfsen erhält man gleiche Resultate.*

3) *Der Teil ist kleiner als das Ganze.*

4) *Die Differenz zweier ungleicher Gröfsen übersteigt, wenn sie eine hinreichende Anzahl von Malen zu sich selbst addiert wird, jede gegebene Gröfse.*

Das Mafs einer Gröfse definieren wir in ähnlicher Weise wie das Verhältnis zweier Gröfsen:

Man sagt, daſs eine Zahl a eine Gröſse A miſst, wenn — unter U die Maſseinheit verstanden — durch m-malige Wiederholung von U und n-malige von A, die Gröſse mU gröſser, gleich oder kleiner ist als nA, je nachdem die Zahl $\frac{m}{n}$ *gröſser, gleich oder kleiner als a ist.*

Bei dieser Definition braucht man nicht vorauszusetzen, daſs man U in gleiche Teile teilen kann. Ist aber U in gleiche Teile teilbar und hat daher das Produkt kU für rationales k eine Bedeutung, so kann man die vorige Definition in die folgende verwandeln:

Man sagt, daſs die Zahl a die Zahl A miſst, wenn — unter U die Maſseinheit verstanden — kU gröſser, gleich oder kleiner als A ist, je nachdem die rationale Zahl k gröſser, gleich oder kleiner als a ist.

Von Nutzen wird uns sein der folgende

Satz. Ist eine Gröſse A kleiner als die Gröſsen $B_1, B_2, \cdots$, *die durch die Zahlen* $b_1, b_2, \cdots$ *gemessen werden, ist aber A gröſser als die Gröſsen* $C_1, C_2, \cdots$, *die durch die Zahlen* $c_1, c_2, \cdots$ *gemessen werden, und giebt es eine einzige Zahl a, die kleiner ist als alle Zahlen b und gröſser als die Zahlen c, so miſst die Zahl a die Gröſse A.*

In der That, es seien m und n ganze Zahlen und man bilde die Gröſsen mU und nA.

Es sei zunächst $\frac{m}{n} > a$. Da a die einzige Zahl ist, die kleiner ist als alle Zahlen b und gröſser als alle Zahlen c, so ist $\frac{m}{n}$, das von a verschieden ist, nicht gleichzeitig kleiner als alle Zahlen b und gröſser als alle c. Also kann es nicht kleiner sein als alle Zahlen b.

Es sei daher b_r eine Zahl der Klasse b, für welche $\frac{m}{n} \geqq b_r$ ist und es sei B_r die durch b_r gemessene Gröſse. Dann wird nach der Definition des Maſses:

$$mU \geqq nB_r.$$

Es ist aber $B_r > A$ und daher $nB_r > nA$ (Euklid, Buch V, Axiom III) und:

$$mU > nA.$$

Es sei jetzt $\frac{m}{n} < a$; dann zeigt man ähnlich, dafs

$$mU < nA$$

ist.

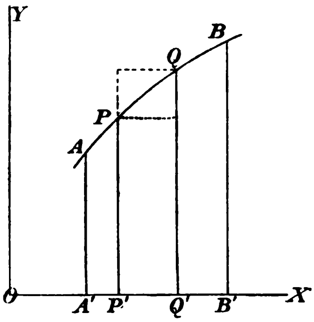
Endlich sei $\frac{m}{n} = a$. Dann behaupte ich, dafs $mU = nA$ ist. In der That, leugnet man dies, so ist mU kleiner oder gröfser als nA. Es sei mU kleiner als nA und es sei Δ ihre Differenz, also $mU + \Delta = nA$. Dann giebt es (Annahme 4) eine Zahl k, sodafs $k\Delta > U$ ist. Man multipliziere die letzte Gleichung mit k, dann erhält man $kmU + k\Delta = knA$ und daher $(km + 1)\,U < knA$. Diese Ungleichung ist aber absurd; denn es ist $\frac{km+1}{kn} = \frac{m}{n} + \frac{1}{kn}$ gröfser als $\frac{m}{n} = a$ und daher mufs wie oben bewiesen ist $(km + 1)\,U > knA$ sein. Also kann mU nicht kleiner als nA sein. In ähnlicher Weise zeigt man, dafs mU nicht gröfser sein kann als nA. Also schliefst man:

$$mU = nA.$$

Daher wird, wenn man U m-mal und A n-mal wiederholt, die Gröfse mU gröfser, gleich oder kleiner als nA, jenachdem $\frac{m}{n}$ gröfser, gleich oder kleiner als a ist; es ist also a die Zahl, welche A mifst.

195. **Ebener Flächeninhalt.** — Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer auf senkrechte Cartesische Achsen bezogenen Kurve. Man nehme an, dafs $f(x)$ positiv und stetig in dem Intervalle von a bis b und dafs $a < b$ ist. Den Abscissen $OA' = a$ und $OB' = b$ mögen die Ordinaten $A'A$ und $B'B$ entsprechen. Ich behaupte, dafs der ebene Flächeninhalt, der von der Kurve AB, den Ordinaten AA', BB', und von der x-Achse begrenzt ist, durch das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gemessen wird.

Fig. 6.



In der That, man teile die Strecke $A'B'$ in einzelne Teile und zeichne in den Teilpunkten die Ordinaten, sodafs der gegebene Flächeninhalt in einzelne Teile geteilt wird. Es sei $PQP'Q'$ einer von diesen und man konstruiere die beiden Rechtecke, deren Basis $P'Q'$ und deren Höhe die gröfste und kleinste Ordinate der Punkte des Bogens PQ ist; dasselbe Verfahren führe man für alle Teile aus, in die man die gegebene Fläche geteilt hat; dann ist diese kleiner als die Summe der ersten Rechtecke und gröfser als die Summe der zweiten, nach welchem Gesetze man auch $A'B'$ teilt.

Nennt man nun $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \cdots x_{n-1},\ x_n = b$ die Abscissen der Teilpunkte von $A'B'$ und $l(\alpha, \beta)$ und $\lambda(\alpha, \beta)$ den gröfsten und kleinsten Wert von $f(x)$ in dem Intervalle (α, β), so wird die Summe der ersten Rechtecke durch die Zahl gemessen:

$$s_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, l(x_r, x_{r+1})$$

und die der zweiten durch

$$s_2 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, \lambda(x_r, x_{r+1})$$

und es giebt eine einzige Zahl $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, die kleiner ist als alle möglichen Werte von s_1 und gröfser als alle s_2.

Also ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ die Zahl, welche den gegebenen Flächeninhalt mifst.

196. **Volumen.** Gegeben sei irgend ein Körper und man suche sein Volumen V. Man zeichne eine Achse OX und denke sich ein System von zu OX senkrechten Ebenen, welche OX in Punkten treffen mit den Abscissen

$$x_0 = a,\quad x_1,\ x_2, \cdots x_n = b$$

und welche den Körper in Teile zerlegen. Man nehme an, dafs der gegebene Körper zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ enthalten ist.

Es sei $f(x)$ der Flächeninhalt des Schnittes, welchen die Ebene mit der Abscisse x in dem Körper hervorbringt.

Wir wollen $f(x)$ als stetig voraussetzen.

Man nehme an, dafs man erkannt habe, dafs das Volumen, welches von zwei parallelen Ebenen begrenzt ist, zwischen den Voluminibus zweier Cylinder enthalten ist, deren Höhe die Entfernung der beiden Ebenen ist und deren Basen beziehungsweise der gröfste und kleinste Flächeninhalt des Schnittes sind, den eine zu den beiden Ebenen parallele und zwischen ihnen enthaltene Ebene in dem Körper hervorruft. In den gewöhnlichen Fällen ist die Richtigkeit hiervon leicht zu erkennen, in allen Fällen könnte man dies als Postulat aufstellen.

Alsdann ist das gegebene Volumen kleiner als die Summe von gewissen Cylindern, die durch $s_1 = \Sigma(x_{r+1} - x_r)\, l(x_r, x_{r+1})$ gemessen wird, und gröfser als die Summe von anderen Cylindern, die durch $s_2 = \Sigma(x_{r+1} - x_r)\, \lambda(x_r, x_{r+1})$ gemessen wird.

Es existiert aber nur eine einzige Zahl $\int_a^b f(x)\,dx$, die kleiner ist als alle Werte von s_1 und gröfser als die Werte von s_2. Folglich mifst $\int_a^b f(x)\,dx$ das gegebene Volumen.

197. **Bogenlänge einer ebenen Kurve.** Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve AB in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten. Man setze voraus, dafs die Funktion $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$ in dem Intervalle besitzt und dafs in ihm $f'(x)$ immer wächst oder immer abnimmt oder wenigstens, dafs man das Intervall (a, b) in Teilintervalle zerlegen kann, in deren jedem $f'(x)$ immer wächst oder immer abnimmt.

Wir nehmen die zwei Postulate (Archimedes, *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*, *A. λαμβ. α'* und *β'*) zu Hülfe:

1) *Von allen begrenzten Linien ist die Gerade die kürzeste.*

2) *Bei allen begrenzten ebenen Linien, die nach derselben Seite zu konvex sind, ist die eingeschlossene kleiner als die einschliefsende.*

Man setze $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, also gleich dem reziproken Cosinus des Winkels, welchen die Tangente des Kurvenpunktes, dessen Abscisse x ist, mit der Achse OX bildet. Es sei (α, β) ein Teilintervall von (a, b) und es sei PQ der zugehörige Kurvenbogen. Alsdann ist der Bogen PQ zwischen zwei Gröfsen enthalten, die durch die Zahlen

$$(\beta - \alpha)\, l(\alpha, \beta) \quad \text{und} \quad (\beta - \alpha)\, \lambda(\alpha, \beta)$$

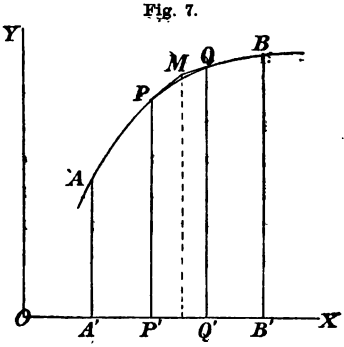
gemessen werden, wo $l(\alpha, \beta)$ und $\lambda(\alpha, \beta)$ die obere und untere Grenze der Werte von $F(x)$ in dem Intervalle (α, β) bezeichnen. In der That, der Bogen PQ ist gröſser als seine Sehne (Postulat 1). Diese wird aber gemessen durch

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+[f(\beta)-f(\alpha)]^2}=(\beta-\alpha)\sqrt{1+\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right)^2}=$$
$$=(\beta-\alpha)\sqrt{1+f'(x_1)^2}=(\beta-\alpha)\,F(x_1),$$

wo x_1 zwischen α und β enthalten ist. Dieser Ausdruck ist gröſser als $(\beta-\alpha)\,\lambda(\alpha, \beta)$.

Wenn ferner in dem Intervalle (α, β), $f'(x)$ immer wächst oder immer abnimmt, so ist der Bogen PQ immer nach derselben Seite der Ebene konvex. Zeichnet man daher die Tangenten in P und Q an die Kurve, so treffen sich diese in einem Punkte M, dessen Abscisse γ zwischen α und β enthalten ist und es wird nach dem zweiten Postulate: Bogen $PQ < PM + MQ$. Die Linie PMQ wird aber durch $(\gamma-\alpha)\,F(\alpha)+(\beta-\gamma)\,F(\beta)$ gemessen und, da $F(\alpha)$ und $F(\beta)$ kleiner sind als $l(\alpha, \beta)$, so schlieſst man, daſs der Bogen PQ kleiner ist als die durch $(\beta-\alpha)\,l(\alpha, \beta)$ gemessene Länge.

Fig. 7.



Wenn in dem Intervalle (α, β), $f'(x)$ nicht immer in demselben Sinne variiert, so kann man nach den gemachten Annahmen dieses Intervall in andere zerlegen, z. B. (α, γ), (γ, δ), (δ, β), in deren jedem $f'(x)$ in demselben Sinne variiert. Daher wird der Bogen PQ kleiner als die Länge

$$(\gamma-\alpha)\,l(\alpha, \gamma)+(\delta-\gamma)\,l(\gamma, \delta)+(\beta-\delta)\,l(\delta, \beta)<(\beta-\alpha)\,l(\alpha, \beta)$$

wie vorher.

Dies vorausgeschickt, teile man das gegebene Intervall in Teile und wende auf jeden von ihnen die vorigen Ungleichungen an, dann wird der Bogen AB kleiner als das System der Längen, welche durch die Zahlen $s_1 = \Sigma(x_{r+1}-x_r)\,l(x_r, x_{r+1})$ gemessen werden und gröſser als die Längen, die durch die

Zahlen $s_2 = \Sigma(x_{r+1} - x_r)\,\lambda(x_r, x_{r+1})$ gemessen werden. Es giebt aber nur eine einzige Zahl

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

die kleiner ist als alle Werte von s_1 und gröfser als die Werte von s_2; also mifst dies Integral den Bogen AB.

Man sieht aus diesen Betrachtungen, wie man zu der Erkenntnis gelangen kann, dafs eine bestimmte Zahl eine gegebene Gröfse mifst, ohne dafs man neue Definitionen zu Hülfe nehmen müfste, die willkürlich sind oder doch so erscheinen. Wir sind vielmehr von den in der Anschauung unmittelbar gegebenen Begriffen der geometrischen Gröfsen ausgegangen und haben diese nur durch die einfachsten Postulate vervollständigt, die bereits von den alten Geometern zugelassen wurden.

Diese Schlufsweise, welche von Archimedes herrührt, kann man auch auf andere geometrische Gröfsen anwenden. Man erkennt aber leicht, dafs man sie nicht auf alle geometrischen Gröfsen anwenden kann, wenigstens nicht ohne neue Postulate einzuführen, die nicht allgemein zugelassen sind.

§ 3. Berechnung der bestimmten Integrale.

198. Nach der Definition, die wir von einem bestimmten Integrale gegeben haben, erhält man seinen Wert mit Leichtigkeit, sobald man das unbestimmte Integral kennt. Man kann die Rechnung jedoch einfacher gestalten, wenn man direkt auf das bestimmte Integral die Integrationsmethoden anwendet, deren wir uns für die unbestimmten Integrale bedient haben.

So fanden wir, dafs durch die Substitution $x = \varphi(t)$:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

wird. Diese Gleichung bedeutet, dafs nach Berechnung des unbestimmten Integrales von $f(x)\,dx$:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

und durch die Substitution $x = \varphi(t)$ die Funktion $F(\varphi(t))$

ein Integral des Gliedes auf der rechten Seite wird. Nimmt man jetzt auf der rechten Seite das Integral bestimmt zwischen den Grenzen t_0 und t_1, so erhält man:

$$F[\varphi(t_1)] - F[\varphi(t_0)] = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Setzt man $\varphi(t_0) = x_0$ und $\varphi(t_1) = x_1$, so hat das Glied auf der linken Seite den Wert

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

also wird:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Beispiele. Setzt man in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, $x = \frac{\pi}{2} - z$, so erhält man:

$$\sin x = \cos z, \quad dx = -dz.$$

x nimmt die Werte 0 und $\frac{\pi}{2}$ an, wenn man $z = \frac{\pi}{2}$ und 0 setzt, also wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^m z\,dz.$$

Vertauscht man in dem Gliede auf der rechten Seite die Grenzen und den Buchstaben z mit x, so kommt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx.$$

Es sei ferner zu berechnen $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$. Hier kennt man das unbestimmte Integral nicht. Man erhält:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

In dem zweiten Gliede auf der rechten Seite mache man die Substitution $x = \pi - z$; dann wird $\sin x = \sin z$, $\cos x = -\cos z$, $dx = -dz$ und für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $z = \frac{\pi}{2}$, für $x = \pi$ wird $z = 0$. Man erhält also:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - z) \sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - z) \sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz.$$

Dieser Ausdruck spaltet sich in die Summe:

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz.$$

Nun ist $\displaystyle\int \frac{\sin z\, dz}{1 + \cos^2 z} = -\int \frac{d \cos z}{1 + \cos^2 z} = -\operatorname{arc\,tang} \cos z$ und daher wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z\, dz}{1 + \cos^2 z} = -\operatorname{arc\,tang} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang} \cos 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Setzt man diese Werte in das gesuchte Integral ein und beachtet, daſs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

ist, so erhält man endlich:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

199. Die Regel der teilweisen Integration und einige der gefundenen Reduktionsformeln führen auf Formeln von dem Typus:

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) \pm \int \psi(x)\, dx.$$

Setzt man $F(x) = \int f(x)\,dx$, $\Psi(x) = \int \psi(x)\,dx$, so wird

$$F(x) = \varphi(x) \pm \Psi(x).$$

Setzt man dieser Formel erst $x = x_1$, dann $x = x_2$ und subtrahiert, so erhält man:

$$F(x_2) - F(x_1) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \pm [\Psi(x_2) - \Psi(x_1)]$$

oder:
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \pm \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx.$$

Um also ein bestimmtes Integral teilweise zu integrieren braucht man nur die Differenz der Werte zu bilden, welche der integrierte Teil an den Grenzen annimmt und das neue Integral zwischen denselben Grenzen zu nehmen.

Man suche z. B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ für ganze, positive m. Wir haben die Formel gefunden [Nr. 185 (6)]:

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx.$$

Wendet man daher die vorige Regel an, so erhält man, wenn $m > 1$ ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx.$$

Ahnlich findet man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx = \frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} x\,dx$$

. . . .

Wendet man so mehrere Male dieselbe Formel an, so kommt man für gerades $m = 2n$ auf:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

und daher wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ist dagegen m ungerade, $m = 2n + 1$, so kommt man schliefslich auf die Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1$$

und daher wird:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

200. Aus den vorigen Formeln können wir einen Ausdruck für π unter der Form eines unendlichen Produktes ableiten. In der That, für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ ist:

$$0 \leqq \sin x \leqq 1$$

und daher wird:

$$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x$$

und also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx.$$

Setzt man für die Integrale ihre Werte ein und vertauscht die Ordnung der Faktoren, so wird:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n}$$
$$< \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1}$$

oder:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<$$
$$<\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-\theta}{2n-1},$$

wo θ eine Zahl zwischen 0 und 1 ist.

Man lasse in dieser Formel n unbegrenzt wachsen; dann konvergiert der letzte Faktor $\frac{2n-\theta}{2n-1}$ gegen die Einheit, also wird:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots.$$

Diese Formel verdankt man Wallis.

§ 4. Bestimmte Integrale mit unendlichen Grenzen, oder solche, in denen die zu integrierende Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich wird.

201. Bei der Definition von $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ wurde vorausgesetzt, daſs die Grenzen a und b endliche Zahlen sind und daſs auch die Funktion $f(x)$ in dem Integrationsintervalle bestimmt und endlich ist. Bei passenden Verabredungen können wir jedoch demselben Symbol auch dann eine Bedeutung unterlegen, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind.

Unter den Schreibweisen

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

wollen wir die Grenzwerte verstehen, denen, falls sie vorhanden sind, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ zustrebt, wenn beziehungsweise b gegen $+\infty$, a gegen $-\infty$ oder b gegen $+\infty$ und a gegen $-\infty$ konvergiert.

Man suche z. B. $\int\limits_0^\infty e^{-hx}\,dx$. Man hat:

$$\int e^{-hx}\,dx = -\frac{e^{-hx}}{h}, \quad \int_0^b e^{-hx}\,dx = \frac{1-e^{-bh}}{h}.$$

Läfst man b positiv unendlich werden, so wird für $h > 0$, $\lim e^{-bh} = 0$ und daher wird:

$$\int_0^\infty e^{-hx}\,dx = \lim_{b=\infty} \int_0^b e^{-hx}\,dx = \frac{1}{h}, \quad h > 0.$$

Ist dagegen $h < 0$, so wächst $\left|\int_0^b e^{-hx}\,dx\right|$ mit wachsendem h selbst unbegrenzt und daher hat dann $\int_0^\infty e^{-hx}\,dx$ keinen endlichen Grenzwert.

Man hat:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

und daher

$$\int_a^b \sin x\,dx = -\cos b + \cos a.$$

Läfst man hierin b unendlich werden, so schwankt $-\cos b$ zwischen -1 und $+1$, ohne einen bestimmten Grenzwert zu erhalten; daher hat der Ausdruck

$$\int_a^\infty \sin x\,dx$$

überhaupt keinen Sinn.

Dasselbe gilt, wenn man die untere Grenze oder beide Grenzen unendlich werden läfst.

Man betrachte noch

$$\int \frac{dx}{h^2+x^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{h} + C.$$

Wir können $h > 0$ annehmen; denn in dem Differentiale kommt nur das Quadrat von h vor und nach den getroffenen Verabredungen können wir $\operatorname{arc\,tang} \frac{x}{h}$ als zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten ansehen. Man erhält:

$$\int_0^b \frac{dx}{h^2+x^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{h}.$$

Läfst man b unendlich werden, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{h^2+x^2} = \frac{\pi}{2h}.$$

Man hat auch:

$$\int_a^b \frac{dx}{h^2+x^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{h} - \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{h}$$

und wenn man b gegen $+\infty$, a gegen $-\infty$ konvergieren läfst, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^2+x^2} = \frac{\pi}{h}.$$

In Nr. 188 fanden wir:

$$\int e^{-ax} \cos bx dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx - b \sin bx),$$

$$\int e^{-ax} \sin bx dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx + b \cos bx).$$

Daher schliefst man, wenn $a > 0$ ist:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

202. Kennt man von dem gegebenen Differentiale das unbestimmte Integral, so erkennt man aus der Formel:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

häufig sehr leicht, ob das vorgelegte Integral mit unbegrenzt wachsendem b oder a oder b und a gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert und ob daher die gegebene Funktion zwischen unendlichen Grenzen integrierbar ist.

Andrerseits sind die folgenden Kriterien von Nutzen, welche allein durch die Untersuchung des Differentiales erkennen lassen, ob das Integral zwischen unendlichen Grenzen existiert.

Satz. Behält die Funktion $f(x)$ *von einem bestimmten Werte von* x *an ein festes Zeichen, so ist* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *unendlich, wenn das Produkt* $xf(x)$ *von einem bestimmten Werte von* x *an absolut gröfser als eine endliche von null verschiedene Zahl bleibt.*

Dasselbe Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *ist endlich, wenn das Produkt* $x^{1+n}f(x)$*, wo* n *eine positive Zahl ist, von einem bestimmten Werte von* x *an absolut kleiner als eine endliche Zahl bleibt.*

In der That, ist X ein Wert von x, von welchem an die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, so hat man:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^X f(x)\,dx + \int\limits_X^b f(x)\,dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist endlich und von b unabhängig; man braucht also nur das zweite zu betrachten.

Ist z. B. $f(x)$ positiv und $xf(x) > A$, wo A eine von null verschiedene Zahl ist, so wird $f(x) > \frac{A}{x}$ und daher $\int\limits_X^b f(x)\,dx > \int\limits_X^b \frac{A}{x}\,dx$. Dieses Integral hat den Wert $A \log \frac{b}{X}$ und konvergiert mit unbegrenzt wachsendem b gegen ∞. Also wächst auch $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ mit unbegrenzt wachsendem b unbegrenzt.

Man nehme jetzt an, dafs für alle Werte von $x > X$, $x^{1+n}f(x) < A$ sei, wo $n > 0$ ist. Dann wird $f(x) < \frac{A}{x^{1+n}}$ und für hinreichend grofse X und b $\int\limits_X^b f(x)\,dx < \frac{A}{n}\left(\frac{1}{X^n} - \frac{1}{b^n}\right) < \frac{A}{nX}\cdot$

Wächst daher b unbegrenzt, so wächst auch $\int\limits_X^b f(x)\,dx$ beständig, denn seine Ableitung ist positiv; aber es bleibt immer kleiner als eine endliche Zahl. Daher konvergiert es gegen einen endlichen Grenzwert und dasselbe gilt für das vorgelegte Integral.

Korollar. *Behält $f(x)$ von einem bestimmten Werte von x an immer dasselbe Zeichen, so wird $\int_a^b f(x)\,dx$ mit b unendlich, wenn bei unbegrenzt wachsendem x, $\lim x f(x)$ endlich und nicht null oder unendlich wird. Dasselbe Integral ist bestimmt und endlich, wenn $x^{1+n} f(x)$, wo $n > 0$, mit wachsendem x gegen einen endlichen Grenzwert einschließlich der Null konvergiert.*

Wenn die Funktion von einer bestimmten Stelle immer wieder das Zeichen wechselt, so kann man das Kriterium anwenden:

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ hat einen bestimmten endlichen Wert, wenn $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ endlich ist.

In der That, konvergiert $\int_a^b |f(x)|\,dx$ bei unbegrenzt wachsendem b gegen einen endlichen Grenzwert, so giebt es zu einem willkürlich fixierten positiven Werte ε einen Wert von b, etwa $b = B$, so daſs:

$$\int_a^{b'} |f(x)|\,dx - \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_b^{b'} |f(x)|\,dx < \varepsilon$$

wird, wenn b und b' zwei Zahlen gröſser als B sind (Nr. 15).

Da aber $|f(x)| \geqq f(x) \geqq -|f(x)|$ ist, so wird:

$$\int_b^{b'} |f(x)|\,dx > \int_b^{b'} f(x)\,dx > -\int_b^{b'} |f(x)|\,dx.$$

Man kann also zu einem willkürlich fixierten ε einen Wert B von b bestimmen, so daſs die Differenz zwischen zwei Werten, die $\int_a^b f(x)\,dx$ annimmt, wenn man b irgend zwei Werte b und b' gröſser als B erteilt, absolut kleiner als ε wird; das heiſst $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert mit unbegrenzt wachsendem b gegen einen Grenzwert.

203. Wird die Funktion $f(x)$ für $x = b$ unendlich, so versteht man unter $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ den Grenzwert — falls er existiert —, gegen welchen $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ konvergiert, wenn ε null wird; dabei bedeutet $b - \varepsilon$ eine zwischen a und b enthaltene Zahl. Wird $f(x)$ unendlich für $x = a$, so definiert man:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

wo $a + \varepsilon$ zwischen a und b enthalten ist. Wird $f(x)$ unendlich an einer Stelle c zwischen a und b, so setzt man:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

Ähnliche Definitionen stellt man auf, wenn $f(x)$ an mehreren Stellen, die dem Intervalle (a, b) angehören, unendlich wird.

Beispiele. 1) Man sucht $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, wo die zu integrierende Funktion an der oberen Grenze unendlich wird. Man hat:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arc\sin x.$$

Läßt man x gegen 1 konvergieren, so konvergiert die rechte Seite gegen $\frac{\pi}{2}$; daher wird:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Man hat $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$, $\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$; läßt man ε null werden, so kommt:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

3) Man hat $\int \frac{dx}{x} = \log x$, also $\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon$ und daher:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = +\infty.$$

4) Man sucht $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$. Nach der Definition ist dies gleich dem Grenzwerte von $\int\limits_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} + \int\limits_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x}$, wo ε und ε' gegen null konvergieren, es ist also:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim \log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Läfst man ε und ε' unabhängig von einander gegen null konvergieren, so konvergiert die rechte Seite überhaupt nicht gegen einen Grenzwert. Daher ist $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ nicht bestimmt.

204. Wenn man, wie in den vorhergehenden Beispielen, von dem gegebenen Differentiale das unbestimmte Integral kennt, so ist es unter Zuhülfenahme der Formel:

$$\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, d(x) = F(b-\varepsilon) - F(a)$$

oft leicht die Existenz oder Nichtexistenz des Grenzwertes zu erkennen, wenn man ε gegen null konvergieren läfst.

Manchmal kann man durch eine passende Wahl der Veränderlichen das gegebene Differential in ein anderes transformieren, welches in den Integrationsgrenzen endlich bleibt. Will man zum Beispiel die Existenz von

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (k^2 < 1),$$

erkennen, wo das Differential an der oberen Grenze unendlich wird, so setze man $x = \sin\varphi$, dann hat man

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Läfst man jetzt φ gegen $\frac{\pi}{2}$ und daher x gegen 1 konvergieren, so bleibt die zu integrierende Funktion endlich und daher konvergiert auch das Integral auf der linken Seite gegen einen Grenzwert.

Aber man kann in einer grofsen Zahl von Fällen aus der blofsen Prüfung des Differentiales die Existenz des Integrales erkennen, indem man sich der folgenden Sätze bedient.

Satz. Wird $f(x)$ für $x = b$ unendlich und behält es in der Umgebung von $x = b$ ein konstantes Zeichen, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ unendlich, wenn in jener Umgebung das Produkt $(b-x)f(x)$ absolut gröfser als eine feste, von null verschiedene Zahl bleibt. Bleibt dagegen in jener Umgebung das Produkt $(b-x)^n f(x)$, wo $n < 1$ ist, absolut kleiner als eine feste Zahl, so hat $\int_a^b f(x)\,dx$ einen bestimmten endlichen Wert.

In der That, man nehme an, dafs die ausgesprochenen Bedingungen in dem ganzen Intervalle (a, b) erfüllt sind; würde dies nämlich nicht der Fall sein, so brauchte man nur das Integral in zwei andere zu zerlegen. Setzt man ferner der Einfachheit halber $a < b$ und

$$f(x) > 0, \quad |(b-x)f(x)| > A$$

voraus, so wird

$$f(x) > \frac{A}{b-x}$$

und daher:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > A[\log(b-a) - \log\varepsilon].$$

Läfst man ε null werden, so wächst die rechte Seite unbegrenzt und dasselbe gilt daher auch für das Integral auf der linken Seite.

Ist andrerseits $(b-x)^n f(x) < A$ und $n < 1$, so wird unter analogen Annahmen

$$f(x) < \frac{A}{(b-x)^n}$$

und

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx < A\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n} =$$

$$= A\left[\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}\right] < A\cdot\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}.$$

Konvergiert daher ε gegen null, so wächst $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ beständig; denn seine Ableitung ist positiv, es wächst aber nicht unbegrenzt und daher konvergiert es gegen einen Grenzwert und es existiert

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Korollar. *Wird $f(x)$ für $x=b$ unendlich und hat $(b-x)f(x)$ für $x=b$ einen endlichen von null verschiedenen Grenzwert, oder auch einen unendlichen Grenzwert mit bestimmtem Zeichen, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ unendlich. Hat hingegen das Produkt $(b-x)^n f(x)$, wo $n<1$ ist, einen endlichen Grenzwert einschließlich der Null, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ bestimmt und endlich.*

Korollar. *$\int_a^b f(x)\,dx$ ist bestimmt und endlich, wenn dies von*

$$\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$$

gilt.

§ 5. Berechnung einiger bestimmter Integrale.

205. Man betrachte das Integral:

$$(1)\quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad (p>0,\ q>0),$$

welches das Eulersche Integral erster Art heifst. Es hat einen endlichen Wert, wenn p und q positiv sind. In der That, die zu integrierende Funktion ist endlich für alle Werte x im Inneren des Intervalles (0, 1) und sie kann nur an den Grenzen des Intervalles unendlich werden, falls p und q kleiner als 1 sind. Da aber $x^{1-p} \cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ und $(1-x)^{1-q} \cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ an der Stelle $x = 0$ bezw. $x = 1$ den Grenzwert 1 haben, so schliefst man, dafs das Integral immer endlich ist.

Die Gleichung (1) definiert daher eine Funktion $B(p, q)$ von zwei Veränderlichen für alle positiven Werte von p und q. Diese Funktion erfreut sich bemerkenswerter Eigenschaften.

Man setze in (1) $x = 1 - z$; dann erhält man:

$$B(p, q) = -\int_1^0 (1-z)^{p-1} z^{q-1}\, dz = \int_0^1 (1-z)^{p-1} z^{q-1}\, dz$$

oder:

$$B(p, q) = B(q, p); \tag{2}$$

das heifst die Funktion $B(p, q)$ ist eine symmetrische Funktion der beiden Veränderlichen.

Die teilweise Integration ergiebt:

$$\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1} + \frac{q-1}{p}\int x^p(1-x)^{q-2}dx.$$

Setzt man die Grenzen ein, so erhält man, wenn $q > 1$ ist:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx.$$

Benutzt man in dem Integrale rechter Hand die Identität:

$$x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x),$$

so erhält man nach einigen Reduktionen [vergl. auch Nr. 180, (5)]:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{q-1}{p+q-1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx$$

oder:

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1). \tag{3}$$

Wendet man dieses Verfahren mehrmals an und subtrahiert, so lange $q > 1$ ist, jedes Mal eine Einheit, so kommt man auf ein Integral zurück, in welchem $q \leqq 1$ ist. Wir kommen auf $q = 1$, wenn q ganz war und da

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$$

ist, so schliefst man, wenn q ganz ist:

$$(4) \qquad B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \cdot \frac{q-2}{p+q-2} \cdots \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p}.$$

Eine ähnliche Formel würde man erhalten, wenn p ganz ist. Sind p und q beide ganz, so kann man die letzte Formel schreiben:

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

206. Die Funktion $B(p, q)$ kann man für alle Werte p, q in ein unendliches Produkt entwickeln. In der That, löst man die Formel (3) nach dem Integral auf der rechten Seite auf und vermehrt q um eine Einheit, so erhält man:

$$B(p, q) = \frac{p+q}{q} B(p, q+1)$$

und durch mehrmalige Anwendung dieser selben Formel erhält man:

$$(5) \quad B(p, q) = \frac{p+q}{q} \cdot \frac{p+q+1}{q+1} \cdots \frac{p+q+k}{q+k} B(p, q+k+1).$$

Es sei n eine ganze Zahl, die so beschaffen ist, dafs $n \leqq q \leqq n+1$ wird. Da bei Vergröfserung von q sich $B(p, q)$ verkleinert, so folgt:

$$B(p, n+k+1) > B(p, q+k+1) > B(p, n+k+2)$$

oder

$$B(p, n+k+1) > B(p, q+k+1) > \frac{n+k+1}{p+n+k+1} B(p, n+k+1).$$

Der Faktor $\frac{n+k+1}{p+n+k+1}$ ist gleich $1 - \frac{p}{p+n+k+1}$; daraus folgt, dafs es eine Zahl θ zwischen 0 und 1 giebt, für welche

$$B(p, q+k+1) = \left(1 - \frac{\theta p}{p+n+k+1}\right) B(p, n+k+1)$$

wird.

Setzt man unter Berücksichtigung dieser Relation für das B auf der rechten Seite von (5) seinen Wert aus (4), so erhält man:

$$B(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}{q(q+1)\cdots(q+k)} \cdot$$
$$\cdot \frac{1\cdot 2\cdots(n+k)}{p(p+1)\cdots(p+n+k)} \cdot \left(1 - \frac{\theta p}{p+n+k+1}\right).$$

Dies kann man auch schreiben:

$$B(p, q) = \frac{1\cdot 2\cdots k\,(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}{p(p+1)\cdots(p+k)\,q(q+1)\cdots(q+k)} \cdot$$
$$\cdot \frac{(k+1)\cdots(k+n)}{(p+k+1)\cdots(p+k+n)} \cdot \left(1 - \frac{\theta p}{p+n+k+1}\right).$$

Man lasse hierin $k = \infty$ werden. Dann wird der zweite Faktor 1 und daher hat der erste Faktor zum Grenzwert $B(p, q)$ oder es ist:

$$(6) \qquad B(p, q) = \lim_{k=\infty} \frac{k!\,(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}{p(p+1)\cdots(p+k)\,q(q+1)\cdots(q+k)}$$

oder auch:

$$B(p, q) =$$
$$\frac{p+q}{pq}\left(1 - \frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right)\left(1 - \frac{pq}{(p+2)(q+2)}\right)\left(1 - \frac{pq}{(p+3)(q+3)}\right)\cdots.$$

Diese Formel gilt für alle positiven Werte von p und q. Das Produkt auf der rechten Seite konvergiert jedoch für jedes Wertepaar p und q, wenn man nur negative ganze Zahlen und die Null ausschliefst.

Die Funktion B kann man auf eine andere Form bringen, wenn man eine andere Veränderliche in (1) einführt. Setzt man $x = \frac{z}{1+z}$ und schreibt dann für z wieder x, so erhält man:

$$(7) \qquad B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx.$$

Vertauscht man in der Formel (1), x mit $\sin^2 x$, so erhält man:

$$(8) \qquad B(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x\,dx.$$

Setzt man hierin $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, so findet man:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi. \tag{9}$$

Macht man in der Formel (6), $p = q = \frac{1}{2}$, so findet man die Formel von Wallis (Nr. 200).

207. Das Integral

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx \tag{1}$$

heifst das Eulersche Integral zweiter Art. Es hat einen endlichen Wert, wenn $n > 0$ ist. In der That, multipliziert man die zu integrierende Funktion mit irgend einer Potenz von x, so hat das Produkt den Grenzwert null, wenn x unbegrenzt wächst. Es kann unendlich werden für $x = 0$, wenn $n < 1$ ist; da aber $x^{1-n} \cdot e^{-x} x^{n-1}$ für $x = 0$ den Grenzwert 1 hat, so schliefst man, dafs das Integral endlich ist.

Die Funktion $\Gamma(n)$ erfreut sich bemerkenswerter Eigenschaften. Man erhält durch teilweise Integration

$$\int e^{-x} x^{n-1}\, dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \int e^{-x} x^{n-2}\, dx.$$

Setzt man die Grenzen ein, so wird für $n > 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = (n-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-2}\, dx$$

oder:

$$\Gamma(n) = (n-1)\, \Gamma(n-1). \tag{2}$$

Diese Formel gestattet den Wert von n, wenn er gröfser als 1 war, auf einen Wert zwischen 0 und 1 zurückzuführen. Ist n ganz, so kommt man durch mehrmalige Anwendung derselben Formel auf das Integral:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$

und daher wird für ganzes n:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = (n-1)!. \tag{3}$$

208. **Man kann die Funktion $\Gamma(n)$ in ein unendliches Produkt entwickeln. Man setze dazu in (1) $x = kz$, wo k eine willkürliche positive Zahl ist; dann wird:**

$$\text{(a)} \qquad \Gamma(n) = k^n \int_0^\infty e^{-kz} z^{n-1}\, dz.$$

Nun ist aber $e^z > 1 + z$ und daher $e^{-kz} < \frac{1}{(1+z)^k}$ und:

$$\Gamma(n) < k^n \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\, dz}{(1+z)^k}.$$

Das Integral auf der rechten Seite reduziert sich auf die Funktionen B, wenn man setzt $z = \frac{t}{1-t}$ (Nr. 206, Formel 7) und es wird:

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-1}\, dz}{(1+z)^k} = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{k-n-1}\, dt,$$

also

$$\text{(b)} \qquad \Gamma(n) < k^n B(n, k-n).$$

Auf der anderen Seite hat man:

$$\int_0^\infty e^{-kz} z^{n-1}\, dz > \int_0^1 e^{-kz} z^{n-1}\, dz.$$

Da aber $e^{-z} > 1 - z$ ist, so hat man um so mehr:

$$\int_0^\infty e^{-kz} z^{n-1}\, dz > \int_0^1 (1-z)^k z^{n-1}\, dz = B(n, k+1)$$

und mithin wird:

$$\text{(c)} \qquad \Gamma(n) > k^n B(n, k+1).$$

Schreibt man andrerseits in (b) an Stelle von k, $k+n+1$, so erhält man:

$$\Gamma(n) < (k+n+1)^n B(n, k+1) = k^n B(n, k+1) \cdot \left(1 + \frac{n+1}{k}\right)^n.$$

Vergleicht man diese Formel mit der vorigen, so folgt:

$$\text{(d)} \qquad \Gamma(n) = k^n B(n, k+1) \cdot \left(1 + \theta \frac{n+1}{k}\right)^n,$$

wo $0 < \theta < 1$ ist. Man lasse in dieser Formel k unbegrenzt wachsen, dann erhält der Faktor des Gliedes auf der rechten Seite den Grenzwert 1 und daher wird:

$$\Gamma(n) = \lim_{k=\infty} k^n B(n, k+1).$$

Nimmt man k als ganze Zahl an und setzt für B seinen bekannten Ausdruck, so folgt:

$$\Gamma(n) = \lim_{k=\infty} k^n \frac{1 \cdot 2 \cdots k}{n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (6) der Nr. 206, welche die Entwickelung von $B(p, q)$ in ein unendliches Produkt giebt, so schliefst man sofort, dafs die Funktion B sich durch die Funktion Γ ausdrückt. In der That, man hat:

$$\Gamma(p) = \lim k^p \frac{k!}{p(p+1)\cdots(p+k)}, \quad \Gamma(q) = \lim k^q \frac{k!}{q(q+1)\cdots(q+k)},$$

$$\Gamma(p+q) = \lim k^{p+q} \frac{k!}{(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}$$

und daher wird

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \lim \frac{k!(p+q)(p+q+1)\cdots(p+q+k)}{p(p+1)\cdots(p+k)q(q+1)\cdots(q+k)}$$

oder:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Setzt man hierin $p = q = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi,$$

also

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

209. Man betrachte noch das Integral:

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Setzt man $x = \sqrt{z}$, so hat man

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

oder:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Man hat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Setzt man in dem ersten Integrale rechter Hand $x = -z$, so wird es mit dem zweiten identisch und daher wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx,$$

in welchem a eine positive Konstante bedeutet, kann man auf das vorhergehende durch die Substitution $x\sqrt{a} = z$ zurückführen; daher wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

§ 6. Reihenentwickelung der bestimmten Integrale.

210. Kann man die zu integrierende Funktion $f(x)$ auf die Form bringen:

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + R_n,$$

wo $u_0, u_1 \cdots$ stetige Funktionen von x sind, so erhält man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \cdots + \int_a^b u_{n-1}\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

Man lasse hierin n unbegrenzt wachsen. Hat dann $\int_a^b R_n\,dx$ den Grenzwert null, so erschließt man die Reihenentwickelung des Integrales:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \cdots.$$

211. Man hat zum Beispiel:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}.$$

Daher erhält man nach Multiplikation mit dx und Integration zwischen 0 und x:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

Nun ist

$$\int_0^x \frac{x^n}{1+x}\,dx = \frac{1}{1+\theta x}\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)},$$

wo θ eine Zahl zwischen 0 und 1 ist. Hieraus erkennt man, dafs wenn $-1 < x \leqq 1$ ist, $\int_0^x \frac{x^n}{1+x}\,dx$ für $n = \infty$ den Grenzwert null hat und daher wird (Nr. 79):

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leqq +1).$$

Ist x nicht zwischen diesen Grenzen enthalten, so divergiert die Reihe auf der rechten Seite.

212. Man hat:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \pm x^{2(n-1)} \mp \frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

also wird nach Multiplikation mit dx und Integration zwischen 0 und x:

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \int_0^x \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx.$$

Das letzte Glied hat den Wert:

$$\int_0^x \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{1+\theta x^2}\int_0^x x^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x^2)},$$

wo θ zwischen 0 und 1 enthalten ist. Man sieht daher, dafs für $-1 < x \leqq +1$ dieses Glied den Grenzwert null hat und erhält (Nr. 82)

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 < x \leqq +1).$$

213. *Satz. Wenn man $f(x)$ in eine Reihe entwickeln kann:*

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

die für alle in dem endlichen Intervalle (a, b) enthaltenen Werte von x konvergiert, und wenn diese Reihe in dem ganzen Intervalle gleichmäfsig konvergiert, so wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \cdots.$$

In der That, konvergiert die Reihe gleichmäfsig in dem ganzen Intervalle, so heifst dies, man kann zu einer willkürlich fixierten positiven Zahl ε immer eine Zahl N finden, so dafs der Rest der Reihe von einem bestimmten Gliede an, dessen Index gröfser als N ist, immer kleiner bleibt als ε, welchen Wert auch x in dem Intervalle (a, b) annehmen möge.

Nennt man daher R_n den Rest der Reihe vom $n + 1^{\text{ten}}$ Gliede an, so wird, wenn $n > N$ ist, $|R_n| < \varepsilon$. Daher kann man $\left|\int_a^b R_n\,dx\right| < \varepsilon(b - a)$ beliebig klein machen, wenn man ε hinreichend klein wählt.

Beispiele. 1) Man hat:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gleichmäfsig in jedem endlichen Intervalle; denn ist α der gröfste absolute Wert, den x annimmt, so ist der Rest der betrachteten Reihe vom $n + 1^{\text{ten}}$ Gliede an absolut kleiner als der Rest der entsprechenden Entwickelung von $\frac{e^\alpha}{\alpha}$, welche konvergiert. Daher wird:

$$\int_a^b \frac{e^x}{x}\,dx = \log b + b + \frac{b^2}{2\cdot 2!} + \frac{b^3}{3\cdot 3!} + \cdots$$
$$- \log a - a - \frac{a^2}{2\cdot 2!} - \frac{a^3}{3\cdot 3!} - \cdots.$$

2) In ähnlicher Weise schliefst man aus der Reihe:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots,$$

welche in jedem endlichen Intervalle gleichmäßsig konvergiert:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots.$$

3) Durch dasselbe Verfahren erhält man:

$$\int_a^b \frac{\cos x}{x}\,dx = \log b - \frac{b^2}{2\cdot 2!} + \frac{b^4}{4\cdot 4!} - \cdots,$$

$$- \log a + \frac{a^2}{2\cdot 2!} - \frac{a^4}{4\cdot 4!} + \cdots.$$

4) Man sucht das Integral $\int_0^x e^x x^{n-1}\,dx$. Man hat:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

$$e^x x^{n-1} = x^{n-1} + \frac{x^n}{1!} + \frac{x^{n+1}}{2!} + \cdots$$

und diese Reihe konvergiert, wenn $n \geqq 1$, gleichmäßsig in jedem endlichen Intervalle. Also wird:

$$\int_0^x e^x x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{1!(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{2!(n+2)} + \cdots.$$

Setzt man die obere Grenze $x = -\infty$, so reduziert sich die linke Seite auf $(-1)^n\,\Gamma(n)$; aber auf der rechten Seite werden alle Glieder unendlich.

5) Man sucht $\int_0^1 x^{nx}\,dx$. Man hat:

$$x^{nx} = e^{nx\log x} = 1 + \frac{nx\log x}{1!} + \frac{n^2x^2\log^2 x}{2!} + \cdots$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gleichmäßsig für alle (positiven) Werte von x.

Um das vorgelegte Integral zu berechnen, braucht man daher nur Integrale vom Typus $\int_0^1 x^m \log^m x\,dx$ auszuführen. Man erhält aber durch teilweise Integration:

$$\int x^m \log^p x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^p x - \frac{p}{m+1}\int x^m \log^{p-1} x\,dx$$

und daher:

$$\int_0^1 x^m \log^p x\, dx = -\frac{p}{m+1}\int_0^1 x^m \log^{p-1} x\, dx.$$

Wendet man diese Formel mehrmals an, so kommt man schließlich auf $\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$; daher wird:

$$\int_0^1 x^m \log^p x\, dx = (-1)^p \cdot \frac{p!}{(m+1)^{p+1}}.$$

Durch Einsetzen erhält man daher:

$$\int_0^1 x^{nx}\, dx = 1 - \frac{n^1}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \cdots.$$

214. *Satz. Es sei:*

(1) $$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

und die Reihe auf der rechten Seite sei in dem endlichen Intervalle (a, b) *gleichmäßig konvergent, die Glieder dieser Reihe seien stetige oder unstetige Funktionen von* x, *sie seien aber in dem Intervalle* (a, b) *integrierbar im Sinne der Definition der Nr. 193. Alsdann ist auch die Funktion* $f(x)$ *integrierbar und ihr Integral ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Reihenglieder.*

In der That, man bestimme zu einer willkürlichen positiven Zahl ε einen Wert von n so, daß der Rest R_n der Reihe (1) vom $n+1^{\text{ten}}$ Gliede an absolut kleiner als ε wird. Man teile ferner das Intervall (a, b) in einzelne Teile, man setze der Einfachheit halber $a < b$ voraus und nenne $s_1\varphi(x)$ und $s_2\varphi(x)$ die Summe der Produkte dieser einzelnen Intervalle mit der oberen beziehungsweise unteren Grenze der Werte von $\varphi(x)$ in diesem Intervalle; alsdann erhält man aus der Gleichung:

$$f(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + R_n$$

die Ungleichungen:

$$s_1 f(x) \leqq s_1 u_0 + s_1 u_1 + \cdots + s_1 u_{n-1} + s_1 R_n$$
$$s_2 f(x) \geqq s_2 u_0 + s_2 u_1 + \cdots + s_2 u_{n-1} + s_2 R_n$$

und da $|R_n| < \varepsilon$ ist, so sind auch $s_1 R_n$ und $s_2 R_n$ absolut kleiner als $\varepsilon(b-a)$.

Nennt man $S_1\varphi(x)$ und $S_2\varphi(x)$ die untere und obere Grenze von $s_1\varphi(x)$ und $s_2\varphi(x)$, so folgt:

$$S_1 f(x) \leqq S_1 u_0 + \cdots + S_1 u_{n-1} \pm \varepsilon(b-a),$$
$$S_2 f(x) \geqq S_2 u_0 + \cdots + S_2 u_{n-1} \pm \varepsilon(b-a).$$

Da aber die Funktionen u integrierbar sind, so hat man $S_1 u = S_2 u = \int_a^b u\,dx$; daher differieren $S_1 f(x)$ und $S_2 f(x)$ von einander um weniger als $2\varepsilon(b-a)$, eine beliebig kleine Zahl; sie sind also einander gleich und die Funktion $f(x)$ ist integrierbar. Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ unterscheidet sich von der Summe der Integrale der ersten n Glieder der Reihe um weniger als $\varepsilon(b-a)$, eine beliebig kleine Zahl. Daher wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \cdots.$$

215. Die teilweise Integration gestattet durch mehrmalige Wiederholung einige Integrale in Reihen zu entwickeln.

Gegeben sei z. B. $\int_0^x x^m f(x)\,dx$. Integriert man teilweise, indem man $x^m dx$ als zu integrierenden Faktor nimmt, so erhält man:

$$\int_0^x x^m f(x)\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} f(x) - \frac{1}{m+1}\int_0^x x^{m+1} f'(x)\,dx.$$

Wendet man auf das Integral der rechten Seite daselbe Verfahren an und fährt so fort, so erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^x x^m f(x)\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} f(x) - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f'(x) \\ + \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} f''(x) - \cdots \\ \pm \frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} f^{(n-1)}(x) \\ \mp \frac{1}{(m+1)\cdots(m+n)} \int_0^x x^{m+n} f^{(n)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Man lasse hierin n unbegrenzt wachsen. Hat das letzte Glied den Grenzwert null, so erhält man die Reihenentwickelung des vorgelegten Integrales. Setzt man in der Reihe $m = 0$, so findet man unter den angegebenen Bedingungen:

$$\int_0^x f(x)\,dx = x f(x) - \frac{x^2}{2!} f'(x) + \frac{x^3}{3!} f''(x) - \cdots.$$

Diese Formel, welche man auch aus der Taylorschen Reihe erhalten könnte, verdankt man J. Bernoulli.

Wendet man die vorige Formel auf das Integral

$$\int_0^x e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

an, so findet man:

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-x} x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} e^{-x} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} e^{-x} + \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} e^{-x} + \cdots \\ + \frac{x^{n+m-1}}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} e^{-x} \\ + \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} \int_0^x x^{n+m-1} e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

Das letzte Glied hat den Wert $\dfrac{(\theta x)^{n+m-1} e^{-\theta x} x}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}$, dessen Grenzwert für $m = \infty$ null ist. Daher ist das vorgelegte Integral gleich der Summe der unendlichen Reihe, deren m erste Glieder auf der rechten Seite der Gleichung stehen.

216. Man kann aber auch die Taylorsche Formel direkt durch teilweise Integration erhalten. Man hat:

$$\int_{x_0}^{a}(a-x)^m f(x)\,dx = \frac{(a-x_0)^{m+1}}{m+1} f(x_0) + \frac{1}{m+1}\int_{x_0}^{a}(a-x)^{m+1} f'(x)\,dx.$$

Wendet man dieselbe Formel auf das Integral auf der rechten Seite an und wiederholt dieses Verfahren n Mal, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{a}(a-x)^m f(x)\,dx = \frac{(a-x_0)^{m+1}}{m+1} f(x_0) + \frac{(a-x_0)^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f'(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(a-x_0)^{m+n}}{(m+1)\cdots(m+n)} f^{(n-1)}(x_0)$$
$$+ \frac{1}{(m+1)\cdots(m+n)}\int_{x_0}^{a}(a-x)^{m+n} f^{(n)}(x)\,dx.$$

Setzt man hierin $m=0$, so bekommt man:

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = \frac{a-x_0}{1\,!} f(x_0) + \frac{(a-x_0)^2}{2\,!} f'(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(a-x_0)^n}{n\,!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{1}{n\,!}\int_{x_0}^{a}(a-x)^n f^{(n)}(x)\,dx.$$

Nimmt man jetzt an, dafs $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist, so erhält man:

$$F(a) - F(x_0) = \frac{a-x_0}{1\,!} F'(x_0) + \frac{(a-x_0)^2}{2\,!} F''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(a-x_0)^n}{n\,!} F^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n\,!}\int_{x_0}^{a}(a-x)^n F^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Dies ist gerade die Taylorsche Formel mit dem Restgliede und dieses erscheint hier unter der Form eines bestimmten Integrales (vergl. S. 69 Anm.).

Dieser Restausdruck ist deshalb so bequem, weil er keine unbestimmte Zahl θ enthält. Setzt man in ihm $a = x_0 + h$, und $x = x_0 + ht$, so erhält man:

$$R = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(x_0 + ht)\, dt.$$

Benutzt man die Formel $\int_{x_0}^{a} \varphi(x)\, dx = (a - x_0)\, \varphi(x_1)$, wo x_1 eine Zahl zwischen x_0 und a ist, so erhält man:

$$R = \frac{1}{n!} (a - x_0)(a - x_1)^n F^{(n+1)}(x_1)$$

und dies ist die Cauchysche Form. Benutzt man andrerseits die Formel:

$$\int_{x_0}^{a} (a-x)^n F^{(n+1)}(x)\, dx = F^{(n+1)}(x_1) \int_{x_0}^{a} (a-x)^n\, dx$$
$$= F^{(n+1)}(x_1) \frac{(a-x_0)^{n+1}}{(n+1)},$$

so bekommt man:

$$R = \frac{(a-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x_1)$$

und dies ist die Form von Lagrange.

Anmerkungen.

N. 1—3.

Die Analysis baut sich ohne jedes Postulat auf dem Begriff der Zahl allein auf. Obgleich nun dieser Begriff dem Leser aus der Arithmetik und Algebra bereits bekannt sein mufs, so wurde die Definition der irrationalen Zahlen hier doch noch einmal gegeben, um die späteren Beweise, wie z. B. den in N. 14, klarer gestalten zu können.

Der Begriff der irrationalen Zahl, wie er hier eingeführt wird, ist der einfachste und natürlichste und hat daher die gröfste Verbreitung gefunden. Eine ausführlichere Entwicklung findet man in *Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa 1878, S. 1—14[1]).

Dem Wesen nach ebenso verfährt *Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872, dem sich *Pasch, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Leipzig 1882 angeschlossen hat. Sie betrachten von den beiden von uns beschriebenen Zahlenkategorien nur die erste, welcher sie den Namen „Zahlenstrecke" geben, und legen sie ihren Definitionen der arithmetischen Operationen zu Grunde.

Andre Mathematiker dagegen betrachten die irrationalen Zahlen als Grenzen der rationalen. Unter ihnen befindet sich *Cantor*, *Über die Ausdehnung eines Satzes* etc., Math. Ann., Bd. 5, S. 123, welcher zuerst die rationalen Zahlen bespricht und dann fortfährt:

„Wenn ich von einer Zahlengröfse in weiterem Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, dafs eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationalen Zahlen

$$a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \tag{1}$$

1) In der deutschen Ausgabe des Dini'schen Werkes: *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Gröfse,* bearbeitet von *Lüroth* und *Schepp,* Leipzig 1892, wurde daher der Cantorschen Definition vor der Dedekind'schen der Vorzug gegeben und die ersten acht Paragraphen, die von den irrationalen Zahlen handeln, umgearbeitet und die Beweise entsprechend modifiziert.

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, dafs die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei, oder mit andern Worten, dafs bei beliebig angenommenem (positivem rationalem) ε eine ganze Zahl n_1 vorhanden ist, so dafs $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, wenn $n \geqq n_1$ und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist."

„Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b."

Diese Definition haben sich auch *Harnack, Die Elemente der Diff.- u. Int.-Rechnung,* Leipzig 1871 und *Lipschitz, Grundlagen der Analysis,* Bonn 1877, S. 37 fast wörtlich angeeignet; sie scheint uns jedoch weniger einfach, wie die *Dedekind*'sche zu sein.

Die Frage, wie die irrationalen Zahlen zu definiren sind, wird sehr ausführlich in *Du Bois-Reymond*'s: *Die allgemeine Funktionentheorie,* Tübingen 1882 erörtert.

In vielen Büchern über die Analysis werden die irrationalen Zahlen überhaupt nicht definirt; man erkennt aber leicht, dafs in einzelnen Beweisen Behauptungen aufgestellt werden, die vorher nicht begründet wurden. Man vergleiche *Serret*, *Cours de Calcul diff. et int.,* Paris 1879, Bd. 1, N. 96.

Bei den griechischen Mathematikern entspricht unserem Zahlenbegriff am besten das Verhältnis, λόγος, zweier Gröfsen. Siehe das fünfte Buch des *Euclid.*

N. 4.

Eine allgemeine Untersuchung der Bedingungen, unter welchen geometrische Gebilde durch Zahlen gemessen und daher Gröfsen genannt werden können, findet man bei: *O. Stolz*, *Arithmetik*, Leipzig 1885 im fünften Kapitel. Dort findet man auch weitere Litteraturangaben.

N. 6.

Der Ausdruck *Funktion* hatte früher allgemein die ihm von *Leibnitz*, *Acta eruditorum*, 1692 beigelegte Bedeutung. *Joh. Bernoulli* hat ihn so definirt:

„On appelle ... Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." *Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris,* 1718, S. 100;

und später *Euler:*

„Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodo cunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus." *Introductio in Analysin Infinitorum,* Lausannae 1748, S. 4.

Die Definition im Text dagegen, nach welcher es nicht nötig ist, dafs y an x durch analytische Beziehungen gebunden ist, rührt von *Lejeune-Dirichlet* her, *Dove's Repertorium der Physik,* Bd. 1. Man vergl. die deutsche Ausgabe *Dini's* S. 48.

N. 7.

Der Begriff des Grenzwertes ist ein Grundbegriff der Analysis. Einige Autoren sind der Ansicht, er lasse sich nur durch die Anschauung gewinnen, andere definieren ihn entweder unvollständig oder mit Worten, die selbst wieder eine Definition nötig haben. Die Definition im Text findet man in allen guten Büchern über den Gegenstand und läfst an Schärfe und Klarheit nichts zu wünschen übrig; sie ist nur etwas lang.

Wir wollen hier den Grenzwert auf eine andere Art definieren, die von der gegebenen sich ihrem Wesen nach nicht unterscheidet, uns aber doch von Vorteil zu sein scheint. Wir werden nur den Fall besprechen, in dem die Variable unbegrenzt wächst.

Man sagt, die $f(x)$ werde bei unbegrenzt wachsendem x gröfser als eine Zahl a, wenn alle Werte der $f(x)$ von einem gewissen Wert von x an gröfser als a sind.

Man sagt, die $f(x)$ werde bei unbegrenzt wachsendem x kleiner als a, wenn alle Werte der $f(x)$ von einem gewissen Wert von x an kleiner als a sind.

Man sagt, die $f(x)$ habe bei unbegrenzt wachsendem x die Zahl a zur Grenze, wenn die $f(x)$ gröfser als jede Zahl wird, die kleiner als a ist, und kleiner als jede Zahl, die gröfser als a ist.

Alle Zahlen lassen sich in Bezug auf das Verhalten der Werte $f(x)$ in drei Kategorien bringen: 1) solche, welche von Werten $f(x)$ überschritten werden; 2) solche, welche von den Werten $f(x)$ nicht erreicht werden; 3) solche, die weder gröfser noch kleiner als alle Werte $f(x)$ sind. Man sieht leicht: Wenn eine Zahl in die erste Abteilung gehört, so gehören ihr auch alle kleineren an und gehört eine Zahl der zweiten an, so gehören dahin auch alle gröfseren; die Zahlen der ersten sind kleiner als die der zweiten und dritten und die der zweiten sind gröfser als die der ersten und dritten.

Satz. Soll $f(x)$ einer Grenze zustreben, so ist die notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dafs die erste und zweite Kategorie existiere und dafs die dritte entweder nicht bestehe oder nur eine einzige Zahl enthalte.

Denn: Strebt $f(x)$ der Grenze a zu, so wird es gröfser als alle Zahlen, die kleiner als a sind, d. h. alle Zahlen, die kleiner als a sind, gehören in die erste Kategorie; dem entsprechend gehören alle Zahlen, die gröfser als a sind, der zweiten Kategorie an und der dritten höchstens die einzige Zahl a. Wenn umgekehrt die erste und zweite Kategorie bestehen und die dritte nicht, so existiert eine Zahl a, die nicht kleiner als irgend eine der ersten und nicht grösser als irgend eine der zweiten Kategorie ist; und wenn die dritte Kategorie nur eine einzige Zahl a enthält, so gehören alle Zahlen unter a in die erste und alle Zahlen über a in die zweite Kategorie. In jedem Fall wird $f(x)$ grösser als alle Zahlen unter a und kleiner als alle Zahlen über a; $f(x)$ hat daher a zur Grenze.

Übrigens ist die Stärke des Wachsens der Werte einer Funktion $f(x)$ bis zu einem gewissen Grade meſsbar und sie läſst sich mit demselben Recht, wie z. B. die imaginären Gröſsen in die Mathematik einführen und studieren.

In der That kann man bei ihr Gleichheit und Ungleichheit, sowie die analytischen Grundoperationen definieren. Sie gehören daher zu den analytischen Gröſsen. Es lassen sich die folgenden Definitionen geben:

Wir sagen, $f(x)$ werde bei unbegrent wachsendem x gröſser oder gleich oder kleiner als $\varphi(x)$, wenn von einem gewissen Wert von x an immer $f(x)$ gröſser oder gleich oder kleiner als $\varphi(x)$ ist.

$\varphi(x)$ kann sich auch auf eine Konstante reduzieren; die Gleichheit oder Ungleicheit wird alsdann durch die Art des Wachsens von $f(x)$ und eine Zahl definiert.

Unter der Summe der Stärke des Wachsens von $f(x)$ und $\varphi(x)$ verstehen wir die Stärke, mit welcher die Summe $f(x) + \varphi(x)$ wächst, und auf analoge Weise lassen sich die übrigen analytischen Operationen definieren. Ist $\varphi(x)$ konstant, so werden die Operationen durch die Art des Wachsens einer Funktion und eine Zahl definiert.

Aus den vorstehenden Definitionen ergibt sich z. B.: daſs x gröſser als jede Zahl wird; daſs x^2 ebenfalls gröſser als jede Zahl wird, aber auch gröſser als x; daſs ferner x^2 gröſser als kx für jedes k wird, d. h. gröſser als jedes Vielfache von x; daſs $\frac{1}{x}$ gröſser als 0, aber kleiner als jede positive Zahl wird, wenn man x gröſsere Werth als 0 beilegt. Daſs $\frac{\sin x}{x}$ kleiner als jede positive Zahl und gröſser als jede negative Zahl wird, ohne gröſser oder gleich oder kleiner als Null zu werden; u. s. w.

Diese analytischen Gröſsen, für welche der Satz nicht mehr gilt, daſs eine Gröſse, eine hinreichend groſse Anzahl mal wiederholt, jede andere Gröſse übertrifft, treten auch bei der Ermittelung der Ordnung des Unendlichwerdens der Funktionen auf und bei einigen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ein eingehenderes Studium derselben würde jedoch zu weit führen.

N. 15.

Die beiden äufserst wichtigen Theoreme, die hier bewiesen werden, sind in den von *Cantor* gegebenen Definitionen der irrationalen Zahlen implicite schon enthalten; vgl. die Anm. zu N. 1—3. *Du Bois-Reymond* hat diese Theoreme in seiner *Funktionentheorie* „das allgemeine Konvergenz- und Divergenzprinzip" genannt.

N. 18.

Der Beweis des Satzes rührt von *Cauchy* her, *Analyse algébrique,* Paris 1821, N. 3.

Der geometrische Beweis, den *Cauchy* ebenfalls gegeben hat ibid. S. 44, in welchem angenommen wird, die Linie, deren Gleichung $y = f(x)$ ist und von welcher zwei Punkte auf entgegengesetzten Seiten der x-Axe liegen, schneide diese Axe in irgend einem Punkt, ist unzulänglich. Denn man kann zwar dem Punktesystem der Abscissen x und Ordinaten $f(x)$ den Namen Linie beilegen, hat damit aber noch nicht das Recht, auf ein solches System die Eigenschaften der Linien, wie sie in der Geometrie betrachtet werden, auszudehnen.

Um den Wert dieses Einwurfs sich klar zu machen, beachte man, dafs eine Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ stetig sein kann, obgleich sie nur rationale Werte in der Nachbarschaft des Wertes x_0 annimmt; man könnte daher fragen, ob eine Funktion existiert, welche in dem Intervalle (a, b) stetig ist und nur rationale Werte annimmt. Offenbar läfst die geometrische Darstellung eine Antwort auf diese Frage nicht zu. Der vorliegende Satz und der folgende zeigen aber, dafs eine solche Funktion unmöglich ist.

Der geometrische Beweis wäre exakt, wenn man die stetige Funktion als eine solche definierte, die von einem Wert zu einem andern nicht übergehen kann, ohne durch alle dazwischen liegenden Werte zu gehen. Gerade diese Definition befindet sich nun in einigen Büchern; unter den Neueren führen wir *Gilbert* an, *Cours d'analyse infinitésimale,* Löwen 1872; irrtümlicher Weise sucht aber der Verfasser auf S. 55 die Aequivalenz seiner Definition mit der hier benutzten zu beweisen. Diese Gleichwertigkeit besteht aber gar nicht; denn, wenn bei der Annäherung des x an a $f(x)$ zwischen Werten oscilliert, welche die $f(a)$ enthalten, ohne irgend einer Grenze zuzustreben, so ist $f(x)$ für $x = a$ nach unserer Definition unstetig und nach der Definition *Gilbert's* stetig. Siehe auch *Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. scient. de l'école normale sup. Bd. IV.

Ebenso wenig folgerichtig ist der Beweis, den *Serret* gibt, *Cours d'Algèbre supérieure,* Bd. 1, S. 95 (4. Ausg.). Abgesehen von anderen Ungenauigkeiten, nimmt der Verf. an, ein System von unendlich vielen positiven Gröfsen sei zwischen zwei positiven Werten eingeschlossen; dies ist nicht genau, da die untere Grenze eines Systems positiver Zahlen die Null sein kann.

N. 20 und 21.

Eine ausführlichere Besprechung der Stetigkeit der Funktionen findet man in *Dini, Grundlagen* etc.

Den zweiten Satz in N. 20 und den ersten in N. 21 verdankt man *Weierstrafs*, der zuerst die Notwendigkeit erkannte, ihn zu beweisen. Siehe *Schwarz*, Journal von Crelle, Bd. 72, S. 141.

Der zweite in N. 21 rührt von *Cantor* her. Siehe *Heine,* Journal von Crelle, Bd. 74, *Darboux, Mémoire* etc. S. 73, *Dini, Grundlagen* etc. § 40.

N. 28.

Der Buchstabe e zur Bezeichnung der Grenze von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ wurde von *Euler* eingeführt, *Introductio in Analysin infinitorum,* I, § 115.

N. 31.

Die in den Beispielen 6 und 7 enthaltenen Sätze verdankt man *Cauchy, Analyse algébrique,* S. 48 u. ff. Der erste Satz lautet bei ihm:

„Si pour des valeurs croissantes de x la différence $f(x+1)-f(x)$ converge vers une certaine limite k, la fraction $\frac{f(x)}{x}$ convergera en même temps vers la même limite." Dabei wird nicht zur Bedingung gemacht, dafs eine obere Grenze der Werte der $f(x)$ in jedem endlichen Intervall existiert.

Die Sätze 9—13 rühren ebenfalls von *Cauchy* her, ibid., S. 103. Der Satz 9 gilt auch dann, wenn man die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ nicht voraussetzt, sondern nur annimmt, dafs die Werte, welche sie in einem endlichen Intervall erhält, kleiner als eine endliche Zahl sind. S. *Darboux, Sur un théorème fondamental de la géométrie projective*, Math. Ann., Bd. 17, S. 55. Den Satz 13 hat auch *Poisson* behandelt, *Traité de mécanique,* Bd. 1, S. 14 und *Abel, Oeuvres complètes,* Christiania 1881, 1, S. 6. Über analoge Fragen siehe *Nouvelles annales,* 2e série, question 763.

Man kann noch das folgende bemerkenswerte Beispiel von Unstetigkeit hinzufügen.

Setzt man $\varphi(x)=\lim\limits_{t=0}\frac{x^2}{x^2+t^2}$, so ist $\varphi(x)=1$, wenn $x \gtrless 0$, und $\varphi(0)=0$. Alsdann wird die Funktion von x

$$\lim \varphi (\sin n!\ \pi x),$$

wenn man zu der Grenze kommt, indem man n ganze, positive unbegrenzt wachsende Werte beilegt, für ein rationales x Null und für ein irrationales x die Einheit.

N. 32.

Mac-Laurin, A treatise of Fluxions, S. 579 definiert als Derivierte (flussione) einer Funktion einer Variablen: „any measures of their respective rates of increase or decrease, while they vary, or flow, together". Er präzisiert in der Folge diesen Begriff genauer und findet die Derivierten der gewöhnlichen analytischen Funktionen.

Diese Art, die Derivierte aufzufassen, ist durchaus streng; in ihr tritt der Begriff der Grenze nicht explicite auf; wir halten es daher für angemessen, sie hier kurz wiederzugeben.

Nachdem definiert ist, was man darunter versteht, eine Funktion wachse oder nehme ab für einen speziellen Wert der Variablen, wird von einer Funktion $f(x)$ gesagt, sie wachse für $x = x_0$ rascher als eine andere $\varphi(x)$, wenn die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ für $x = x_0$ wächst; in diesem Fall sagt man, $\varphi(x)$ wachse weniger rasch als $f(x)$.

Alsdann wird festgestellt, dafs bei einer linearen Funktion das Verhältnis des Zuwachses der Funktion zu dem Zuwachs der Variablen konstant ist, dafs die Funktion um so schneller wächst, je gröfser dieses Verhältnis ist, und diesem konstanten Verhältnis der Name „Derivierte der linearen Funktion" gegeben.

Man sagt, $f(x)$ habe für $x = x_0$ die Derivierte $f'(x_0)$, wenn $f(x)$ für $x = x_0$ weniger rasch als jede lineare Funktion wächst, die eine gröfsere Derivierte als $f'(x_0)$ hat und rascher wächst, als jede lineare Funktion, die eine kleinere Derivierte hat, als $f'(x_0)$.

Man hat lange Zeit geglaubt, jede stetige Funktion habe eine Derivierte, indem man annahm, dies ergebe sich zur Genüge aus geometrischen Betrachtungen über die Tangenten an die Kurven. Später gab man analytische Beweise dafür, die wenig genügten. Die Frage wurde schliefslich dadurch gelöst, dafs man zahlreiche Beispiele von stetigen Funktionen beibrachte, denen die Derivierte für einen speziellen Wert der Variablen (s. Beisp. 6—9) oder für unendliche oder auch für alle Werte der Variablen fehlt. Siehe unter Anderen *Weierstrafs, Journal von Crelle*, Bd. 79, S. 29; *Darboux, Ann. Scientif. de l'École Normale,* 2. Serie, Bd. 4, S. 92 und Bd. 8, S. 195; *Dini, Grundlagen* etc., 10. Kap. S. 205 u. ff.; *Wiener, Crelle's Journal,* Bd. 90, S. 221.

In der Natur treten oft Funktionen auf, die nur bis auf eine konstante Gröſse ε definiert sind, welche sich mit den zu Gebote stehenden Instrumenten nicht mehr messen läſst.

Bei derartigen Funktionen kann von einer Derivierten keine Rede sein. Denn, es sei $f(x)$ die wahre Funktion und $\varphi(x)$ diejenige, welche sie ersetzt und von ihr um weniger als ε abweicht. Setzt man $f(x) = \varphi(x) + \Theta(x)$, so wird

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \frac{\Theta(x+h)-\Theta(x)}{h}.$$

Läſst man nun h der Null zustreben, so läſst sich daraus, daſs man weiſs, daſs $\Theta(x)$ und $\Theta(x+h)$ ihrem absoluten Wert nach kleiner als die feste Gröſse ε sind, kein Schluſs auf den Grenzwert des letzten Gliedes ziehen und mithin auch nicht auf den Grenzwert des Ausdrucks auf der linken Seite.

N. 36 und ff.

Die Ausführungen im Text beweisen die Existenz der Derivierten und bestimmen sie zu gleicher Zeit. Das Verfahren, welches verschiedene auch neuere Autoren eingeschlagen haben, Gleichungen aufzustellen, aus denen die Derivierte sich ergibt, beweist nur, daſs, wenn eine Derivierte existiert, sie die gefundene ist. Vergl. *Serret, Calcul* etc., N. 25, 26, 46, etc.; *Sturm, Analyse,* N. 38 etc.

N. 44—45.

Der hier gegebene Beweis der Grundformel der Analysis wird *Ossian-Bonnet* zugeschrieben. Man vergl. *Serret, Calcul* etc., N. 14. Wie ihn *Serret* führt, ist er nicht einwandsfrei. Die Worte: „il faudra qu'elle (die Function) commence à croître en prenant des valeurs positives, ou à décroître . . ." drücken einen ungenauen Begriff aus, weil eine Funktion für einen speziellen Wert der Variablen nicht wachsend, nicht abnehmend, nicht konstant sein kann, wie es z. B. bei der Funktion $x \sin \frac{1}{x}$ für $x = 0$ der Fall ist. Man sehe einen Aufsatz des Verfassers in den *Nouvelles Annales,* 1884, S. 45 nach und ibid. S. 153 und 252.

Damit das Theorem N. 45 gilt, genügt es, daſs die Funktion $f(x)$ für die Werte von x innerhalb des Intervalls (a, b) eine Derivierte habe und an den Enden a und b stetig sei; diese Derivierte kann auch für irgend einen Wert von x unendlich groſs sein, wenn sie dabei nur ein bestimmtes Vorzeichen behält. Vergl. *Dini, Grundl.,* S. 90 u. ff.

Eine allgemeinere Formel wie die in N. 45 ist die folgende. Wenn $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ für alle dem Intervall (a, b) angehörigen

Werte von x eine Derivierte zulassen, so ist für einen gewissen zwischen a und b liegenden Wert x_1

$$\begin{vmatrix} f'(x_1) & \varphi'(x_1) & \psi'(x_1) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man $\psi(x) = 1$, so erhält man die zweite Formel und wird aufserdem $\varphi(x) = x$, die erste.

Eine andere, von *Waring* herrührende Formel, die ebenfalls aus dem Theorem in N. 44 abgeleitet wird, ist die folgende. Wenn $f(x)$ in einem gewissen Intervall die Derivierte $f'(x)$ hat und $f(a) = f(b) = 0$ ist, so existiert ein zwischen a und b liegender Wert von x, für welchen $f'(x) - k\,f(x) = 0$ ist, worin k eine willkürliche Konstante bedeutet. Um es zu beweisen, hat man nur den angeführten Satz auf die Funktion $f(x)\,e^{-kx}$ anzuwenden.

In den *Nouv. Ann.*, 2. Serie, VI, S. 415 findet man andere Beweise, welche jedoch die Stetigkeit der Derivierten zur Voraussetzung haben.

N. 49.

Beisp. 16. Die Formel in diesem Beispiel verdankt man *Leibnitz, Miscellanea Berolinensia,* 1710. Vergl. *Tardy, Note sur une formule de Leibnitz.* Nouv. Ann., 1869, S. 69.

Beisp. 19. Man hat verschiedene Formeln vorgeschlagen zur Bestimmung der successiven Derivierten der Funktionen von Funktionen:

Hoppe, Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten. Leipzig 1845; und Math. Annalen, Bd. 4.

Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. 2.

Most, Math. Ann., Bd. 4.

Gatting, ebenda, Bd. 3.

Bertrand, Calcul différentiel, S. 309.

Terquem, Nouvelles Annales, Bd. 9.

Tardy, Giornale di Matematiche, Bd. 2.

Mossa, Fais, ebd., Bd. 13.

Teixeira, ebd., Bd. 18.

Fergola, Annali di Matematica, 1858.

Faà di Bruno, ebd., Bd. 6, 1855; derselbe, *Formes binaires*, S. 4.

N. 50.

Die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts verstanden unter einer Reihe immer die Funktion, aus welcher man diese Reihe durch ein geeignetes Verfahren erhielt, und beachteten nicht immer ihre Convergenz. *Cauchy, Anal. alg.,* Kap. 6 verdankt man die genaueren Definitionen, die noch heute im Gebrauch sind; ihm und *Abel* die strengen Beweise der Sätze. Viele von ihnen sind allerdings schon von *B. Bolzano* von Prag (1781—1848) mit aller Strenge aufgestellt und bewiesen worden. Siehe *Stolz*, *Math. Ann.*, XVIII, 255. Freilich findet man auch noch heute unvollständige Definitionen und Beweise, wie z. B.:

„Eine unendliche Reihe, welche einen bestimmten, endlichen Wert repräsentirt, heifst *konvergent*." *Rausenberger, Th. d. periodischen Funktionen*, Leipzig, 1884, S. 23.

Die divergenten Reihen in eigentlich divergente und oscillierende oder unbestimmte zu teilen, erscheint mir überflüssig.

N. 55.

Nicht richtig ist der Satz, den man in einigen Büchern findet: „Ist $\lim u_n = 0$, so läfst sich nur behaupten, dafs die Reihe nicht unbestimmt sein kann." *Novi, Algebra superiore*, S. 56.

So ist z. B. die Reihe, für welche $u_n = \sin\sqrt{n+1}\,\pi - \sqrt{n}\,\pi$ ist, so beschaffen, dafs $\lim u_n = 0$ ist, weil

$$u_n = 2\sin\frac{\sqrt{n+1}\,\pi - \sqrt{n}\,\pi}{2}\cos\frac{\sqrt{n+1}\,\pi + \sqrt{n}\,\pi}{2}$$

und bei unbegrenzt wachsendem n der zweite Faktor zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, der erste aber zur Grenze Null hat. Trotzdem strebt $s_n = \sin\sqrt{n}\,\pi$ mit wachsendem n keinem Grenzwert zu, weder einem endlichen noch einem unendlich grofsen.

N. 56.

Diesen Satz hat *Cauchy, Anal.*, S. 124 aufgestellt; viele Andere haben ihn dann auch gebracht, z. B. *Serret, Calcul*, S. 133, in folgender Fassung: „La série $u_0, u_1, \ldots$ est convergente lorsque la somme $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p+1}$ tends vers zéro, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment."

Diese Worte lassen sich in dem Sinne auslegen, wie in dem Text und bilden dann einen genau richtigen Satz; es lässt sich ihnen aber auch die Deutung geben, dafs die Summe $u_n + \cdots + u_{n+p-1}$, nachdem man p willkürlich festgesetzt habe, bei unbegrenzt wachsendem n der Null zustrebe; der Satz wird dann falsch. Gerade diese zweite Bedeutung hat ihm *Catalan, Théorie élém. des Séries*, S. 4, Note 2 beigelegt; er bestreitet daher seine Gültigkeit. Man erkennt daraus wieder, dafs die Abfassung der Sätze durchaus klar sein mufs.

N. 62.

Verschiedene Mathematiker haben diesen Satz in zu weitem Sinn gefafst. So behauptete *Olivier* in dem *Crelle'schen Journal*, die notwendige und ausreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe sei $\lim nu_n = 0$, und *Abel* bewies in demselben Journal, daſs diese Bedingung nicht ausreicht (*Oeuvres*, S. 399). Übrigens ist die Behauptung *Abel's*, es sei „très juste“ daſs „la série ne peut pas être convergente si le produit nu_n n'est pas nul pour $n = \infty$“, in dem Sinne aufzufassen, daſs die Reihe nicht konvergent sein kann, wenn nu_n einer Grenze zustrebt, die nicht Null ist. Es kann aber vorkommen, daſs die Reihe konvergiert, obgleich nu_n überhaupt keinen Grenzwert hat. Man betrachte z. B. die Reihe, deren Glieder mit dem Index

$$1,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots\ m^3,\ \ldots$$

bezüglich

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \ldots\ \frac{1}{m^2},\ \ldots$$

sind, und deren übrige Glieder derart sind, daſs sie für sich eine beliebige konvergente Reihe bilden. Das Produkt nu_n wird, wenn n eine dritte Potenz $= m^3$ ist, $m = \sqrt[3]{n}$; läſst man nun n unbegrenzt wachsen, so nimmt nu_n beliebig groſse Werte an.

Die Behauptung *Bertrand's*, *Calcul diff.*, S. 239, daſs bei einer konvergenten Reihe „nu_n tend nécessairement vers zéro“, ist daher unrichtig. Vergl. ebenda, S. 232; *Novi, Analisi algebrica*, S. 102.

Richtig dagegen ist der Satz: „Bei einer konvergenten Reihe mit lauter positiven, beständig abnehmenden Gliedern ist $\lim nu_n = 0$.“ Dieser ist z. B. von *Catalan* a. a. O. aufgestellt, aber mit unvollständigem Beweis. Catalan beweist nur, daſs, wenn $\lim nu_n$ von Null verschieden ist, die Reihe divergiert, während er den Fall, in welchem diese Grenze nicht existiert, überhaupt nicht bespricht.

N. 63.

Diesen Satz verdankt man *Cauchy*. Siehe *Catalan, Séries* S. 16.

N. 67.*

Die *Taylor*'sche Formel, wurde — wie damals üblich — ohne den Rest R, von Taylor im Jahre 1715 aufgestellt.

Es ist jedoch zu bemerken, daſs *Joh. Bernoulli* 1694 eine Formel angab, die seinen Namen führt und der Taylor'schen etwa gleichkommt, da man mittelst Vertauschung von Buchstaben von der einen zur anderen übergehen kann. Vergl. *Joh. Bernoulli, Opera omnia,* Bd. 1, S. 125. Wir halten daher seinen Anspruch auf die Priorität für nicht unberechtigt: „Quam eandem seriam postea Taylorus, interjecto plusquam viginti annorum intervallo, in librum, quem edidit a. 1715, *De Methodo incrementorum* transferre dignatus est, sub alio tantum characterum abitu.“ Opera, Bd. 2, S. 584.

Den Rest hat *Lagrange* in die Form (3) gebracht, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1813, Kap. 6, wo er auch in der Gestalt eines bestimmten Integrals entwickelt wird. Die Formel (2) rührt von *Cauchy* her, *Exercices de mathématiques*, Bd. 1, S. 29 und *Comptes rendus des séances de l'Ac. Franç.*, 1840, S. 642.

Fehlerhafte Beweise der *Taylor*'schen Reihe haben *J. König, Nouv. Ann.*, 1874, S. 270 und *E. Amigius, Nouv. Ann.*, 1880, S. 105 gegeben.

In Bezug auf die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe oder besser, weil es einfacher ist, der Maclaurin'schen, lassen sich folgende Fälle anführen.

Die Reihe kann für jeden Wert von x gelten, wie bei e^x, $\sin x$, $\cos x$, etc.;

oder sie kann nur für passend eingeschränkte Werte von x gelten, wie bei $\log(1+x)$, $(1+x)^m$, $\operatorname{arc\,tg} x$, etc.;

oder die Reihe kann für gewisse Werte von x konvergieren, ohne dafs ihre Summe den Wert der gegebenen Funktion hätte. Dieser Fall tritt z. B. bei der Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ein, welche für $x = 0$ mit ihren sämtlichen successiven Derivierten zu Null wird; die Maclaurin'sche Reihe konvergiert daher für alle Werte von x, ohne zu ihrer Summe die Funktion zu haben.

Es lassen sich aber auch noch Beispiele von Funktionen angeben, bei welchen die Maclaurin'sche Reihe für jeden Wert von x, mit Ausnahme des Wertes $x = 0$, divergiert. Man betrachte z. B. die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n x^n}{1 + b_n x^2} \cdots \qquad (1),$$

worin die a_n beliebige Zahlen und die b_n positive Zahlen sind, von der Beschaffenheit, dafs die vorstehende Reihe für ein Intervall konvergent ist, welches in seinem Inneren den Wert $x = 0$ enthält. Die Glieder der vorstehenden Reihe sind, von dem dritten ($n = 2$) an, ihrem absoluten Wert nach kleiner als die Glieder

$$\frac{a_2}{b_2},\quad \frac{a_3}{b_3}x,\quad \frac{a_4}{b_4}x^2,\ \cdots \qquad (2),$$

und diese Reihe läfst sich in der That konvergent machen; setzt man z. B. $b_n = \pm n!a_n$ und wählt das Vorzeichen derart, dafs b_n positiv ausfällt, so konvergiert die aus den absoluten Werten von (2) gebildete Reihe für jeden Wert von x, und (1) ist konvergent und zwar gleichmäfsig in jedem endlichen Intervall.

Differenziert man die Reihe (1) mehrere mal, so ergeben sich andere Reihen, von denen jede in die Summe mehrerer vom Typus $C\sum \frac{x^{n-\alpha}\, a_n b_n^r}{(1+b_n x^2)^r}$ zerfällt, deren Glieder ihrem absoluten Wert nach kleiner als die Glieder $C\frac{a_n}{b_n}x^{n-\alpha-2}$ sind; mithin convergieren alle Reihen, die man durch Differentiation der Glieder der gegebenen Reihe erhält, in jedem Intervall gleichmäfsig. Folglich hat die Funktion $f(x)$ bestimmte und endliche Derivierte für jeden Wert von x; man findet

$$f(0) = a_0,\quad f'(0) = a_1,\quad \frac{1}{2!}f''(0) = a_2 - a_0 b_0,$$

$$\frac{1}{3!}f'''(0) = a_3 - a_1 b_1,\quad \frac{1}{4!}f^{\mathrm{IV}}(0) = a_4 - a_2 b_2 + a_0 b_0^2,$$

$$\dots \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = a_n - a_{n-2}b_{n-2} + a_{n-4}b_{n-4}^2 - \cdots.$$

Wie man daraus erkennt, lassen sich die willkürlichen Gröfsen $a_0, a_1, a_2, \dots$ derart bestimmen, dafs $f(x)$ und ihre Derivierten für $x = 0$ beliebig gegebene Werte haben, und kann man diese Werte so wählen, dafs die Maclaurin'sche Reihe für jeden Wert von x divergiert. Man braucht z. B. nur $f^{(n)}(0) = [n!]^2$ zu setzen.

Man sehe *Du Bois-Reymond, Über den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung,* Math. Ann., XXXI, S. 109.

Die Taylor'sche Formel läfst sich auf folgende Art ausdrücken:

Wenn die 1te, 2te, ... $n$te Derivierte der $f(x)$ für $x = x_0$ existiert, so ist

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \varepsilon],$$

worin ε eine Gröfse bedeutet, die Null zur Grenze hat, wenn h der Null zustrebt. Setzt man $n = 1$, so ergibt sich die Formel, welche zur Definition der Derivierten dient (N. 43). Natürlich mufs $f(x)$, wenn die $n$te Derivierte für $x = x_0$ existiert, auch die vorhergehenden Derivierten in der Umgebung von x_0 besitzen, über die $n$te Derivierte hinaus braucht man aber weder die Existenz noch die Continuität in der Nähe von x_0 vorauszusetzen. Diese Formel ist leicht zu beweisen*) und genügt für die Anwendung auf die Theorie der Maxima und Minima und auf die Geometrie. Diese Art, die Taylor'sche Formel zu fassen, bietet, wie uns scheint, viele Analogie mit dem Verfahren der alten Mathematiker

*) See Peano, Applic. geom. d. calc. inf., 1887, p. 49, ft-note.

zur Zeit, als man die Konvergenz der Reihen noch nicht in Betracht zog.

N. 69.

Maclaurin gab diese Formel in seinem *A treatise of fluxions*, S. 610; fügte aber hinzu: „This theorem was given by D. Taylor.“

N. 70.

Die Reihenentwicklung von e^x, $\sin x$ und $\cos x$ hat zuerst *Newton* gegeben.

N. 72.

Liouville hat bewiesen, daſs die Zahl e nicht die Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten sein kann, und später *Hermite, Sur la fonction exponentielle,* Paris 1874, daſs sie nicht die Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann.

N. 75.

Die binomische Formel hat *Newton* in seinen Briefen an *Leibnitz* vom 13. Juni und 24. Oktober 1676 gegeben. Eine vollständige Diskussion der Konvergenz der Reihe und ihrer Summe findet sich bei *Abel, Oeuvres,* S. 219 angestellt.

N. 79.

Diese Reihe rührt von *Nic. Mercator* her, *Logarithmotechnica,* 1668.

N. 82—83.

Diese Reihe verdankt man *Jacob Gregory, Exercitationes geometricae,* 1668. *John Machin* berechnete nach seinem Verfahren im Jahre 1706 den Wert von π auf hundert Decimalstellen.

Daſs π und π^2 irrationale Zahlen sind, ist schon lange bewiesen. *Lindemann, Über die Zahl* π, Math. Ann., XX, S. 213 zeigte schlieſslich, daſs sie nicht die Wurzel irgend einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann, und bewies damit die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Lineal und Zirkel.

N. 84—87.

Genocchi sagt in seiner Abhandlung *Intorno alle funzioni interpolari,* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, XIII, 1878:

„Die Eigenschaften der Interpolationsfunktionen wurden in einer Abhandlung in Bd. XVI, S. 329—349 der *Annales de Mathématiques* von *Gergonne* (Nismes, 1825—1826) diskutiert, die *Ger-*

gonne selbst auf Grund sehr summarischer von *Ampère* gelieferter Noten zusammengestellt hat. Später, im Jahre 1840 wurden diese Eigenschaften von *Cauchy* in Bd. XI der *Comptes rendus,* S. 755—788 reproduziert und in demselben Band XI, S. 835—847 und ebenda, S. 933 hat *Cauchy* gezeigt, wie die Interpolationsfunktionen zur Auflösung numerischer Gleichungen zu verwenden sind. Diese Funktionen sind dieselben, welche *Newton* in seine allgemeine Interpolationsformel eingeführt hat, die er im Lemma V, Buch III seines Werkes *Philosophiae naturalis Principia mathematica* (3. Ausg., London 1726, S. 486—487) aufstellt, und welche *Lagrange* in den *Leçons élémentaires sur les mathématiques* (*Journal de l'École Polytechnique,* Bd. 2, 7. und 8. Heft, S. 276, *Oeuvres de Lagrange,* Paris 1877, Bd. 7, S. 285) in die Form

$$y = P + Q_1(x-p) + R_2(x-p)(x-q) + S_3(x-p)(x-q)(x-r) + \text{etc.}$$

gebracht hat. Diese Formel wird auch von *Jacobi* in *Crelle's Journal,* Bd. 30, S. 138 zitiert.

Cauchy dehnte im Jahre 1821 den Geltungsbereich der *Lagrange*schen Formel aus, indem er eine rationale gebrochene Funktion bestimmte, deren Zähler vom $(n-1)^{\text{ten}}$ und deren Nenner vom m^{ten} Grade ist, und die für $m+n$ gegebene Werte von x, $m+n$ gegebene Werte annimmt (*Analyse algébrique,* S. 528). *Jacobi* behandelt dieselbe Frage in seinem eben erwähnten Aufsatz (*Crelle,* Bd. 30, S. 127—156) mit grofser Ausführlichkeit; er gibt dort vielfältige ~~vervielfachte~~ Ausdrücke des Zählers und Nenners des gesuchten Bruches mit Hülfe von Determinanten und macht darauf aufmerksam, wie wichtig für die Theorie der Abel'schen Transcendenten die Darstellung gegebener Werte durch rationale gebrochene Funktionen ist. Er untersucht dort auch noch besonders den speziellen Fall, in welchem alle oder einige der Werte $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$, die man x beilegt, einander gleich werden (ebenda, S. 148).

Auch *Bellavitis* beschäftigte sich wiederholt mit den Interpolationsfunktionen. Man sehe seinen an dem Istituto Veneto am 22. Juni 1856 gehaltenen Vortrag: *Sulla risoluzione numerica delle equazioni,* § 15, und den anderen vom 17. Juni 1860: *Appendice alle Memorie sulla risoluzione numerica delle equazioni,* § 30; aufserdem den lithographierten *Riassunto delle lezioni di Algebra,* die er an der Universität Padua 1867—1868 gehalten hat, § 81 und 84."

In derselben Abhandlung *Intorno* etc., in welcher *Genocchi* die vorstehenden Angaben macht, drückt er die Interpolationsfunktionen und mithin auch den Rest einer Interpolationsformel durch mehrfache Integrale aus; in einer anderen Abhandlung *Sopra una proprietà delle funzioni interpolari,* Atti della R. Acc. d. Scienze di Torino, XVI, 1881 beweist er die Formel in N. 86, ohne Integrale zu Hülfe zu nehmen. Der im Text gegebene Beweis rührt aber von *Schwarz* her, *Atti dell' Acc. di Torino*, Bd. 17, 1882, wiewohl der Entwurf dazu sich schon bei *Bertrand, Calc. diff.* S. 164 vorfindet. Wenn die Variabelen komplex sind, so läfst sich die Interpolationsfunktion in die Form eines bestimmten, längs eines Weges genommenen Integrals bringen, analog der bekannten Form einer Derivierten. Siehe *Peano, Sulle funzioni interpolari*, Atti della R. Acc. di Torino, Bd. 18, 1883, wo sich einige durch Interpolationsfunktionen erhaltene Reihenentwicklungen befinden.

Andere Eigenschaften dieser Funktionen sind in den Beispielen 31—34 am Ende des Kapitels enthalten. Die Interpolationsfunktionen von x^m sind mit den *Aleph*-Funktionen *Wronski's* oder den *homogenen vollständigen Funktionen* identisch. Siehe *Trudi, Giornale di Matematiche*, Bd. 2, S. 153.

Siehe auch *Frobenius, Über Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzenreihen*, Crelle's Journal, 90, S. 1.

Eine allgemeinere Formel, wie die in N. 87, ist die folgende: Wenn die $(n+1)$ Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_n(x)$ für die Werte von x, welche einem Intervall angehören, innerhalb dessen sich die Werte, die wir x zulegen werden, befinden, Derivierte bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung haben, so ist

$$\begin{vmatrix} f_0^{(n-1)}(u) & f_1^{(n-1)}(u) & \dots & f_n^{(n-1)}(u) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

worin u einen mittleren Wert zwischen x_1, x_2, ... x_n bezeichnet. Man braucht in dieser Formel nur $f_0(x) = f(x)$ zu machen und die successiven Funktionen den successiven 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten}, ... Potenzen von x gleich zu setzen, um zu der Formel in N. 87 zu kommen.

Allgemeiner noch ist die Determinante Null, deren Horizontalreihen man aus

$$f(a),\ f'(a),\ \dots\ f^{(\alpha)}(a);\ f(b),\ f'(b),\ \dots\ f^{(\beta)}(b);\ \dots$$
$$f(l),\ f'(l),\ \dots\ f^{(\lambda)}(l);\ f^{(n)}(u)$$

erhält, wenn man dem Buchstaben f verschiedene Indices gibt. Darin ist

$$n = (\alpha + 1) + (\beta + 1) + \cdots + (\lambda + 1) - 1$$

und u ein passender Mittelwert von x zwischen a, b, ... l.

In dieser Formel ist die vorhergehende und die Taylor'sche Formel enthalten.

Die Interpolationsfunktionen finden vielfache Anwendung und erlauben mit größter Leichtigkeit gewisse Sätze zu beweisen, von denen viele Autoren komplizierte und oft ungenaue Beweise geben. Wenn z. B. $F(t)$ eine Funktion von t und n anderen Variabeln $(t_1, \ldots t_n)$ ist, so läſst sich das System der n Gleichungen

$$F(t_1) = 0, \quad F(t_2) = 0, \ldots F(t_n) = 0$$

auch

$$F(t_1) = 0, \quad F(t_1, t_2) = 0, \ldots F(t_1, t_2, \ldots t_n) = 0$$

schreiben, und, wenn man die Variabelen $t_1, t_2, \ldots t_n$ nach einem willkürlichen Gesetz dem t zustreben läſst, so werden die vorstehenden Gleichungen in der Grenze

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \ldots F^{(n-1)}(t) = 0.$$

Dieser Satz kommt in der Geometrie bei der Untersuchung der Berührung von Curven und Flächen vor.

N. 88.

Die obere Grenze des bei der Benutzung der logarithmischen Interpolationstafeln begangenen Fehlers, ist, wenn sie durch die Interpolationsfunktionen berechnet werden, viermal so klein, als die Grenze, welche *Serret, Calcul,* Bd. 1, N. 119 angibt, und achtmal so klein, als die von *Sturm, Analyse,* I, N. 137.

N. 91—93.

Die Sätze über die Konvergenz unendlicher Produkte hat *Coriolis* aufgestellt und *Cauchy, Anal. alg.,* N. 9 veröffentlicht. Die Untersuchungen über die Unabhängigkeit der Konvergenz von der Anordnung der Faktoren rühren her von *Weierstraſs, Crelle's Journal,* 51 und *Dini, Ann. di Mat.,* Serie 2, II.

N. 94—96.

Cauchy hat in seinem *Cours d'Analyse,* S. 131 angenommen, die Summe einer konvergenten Reihe, deren Glieder kontinuierliche Funktionen einer Variablen sind, sei selbst eine kontinuierliche Funktion. Dieser Satz ist unrichtig, wenn man nicht andere einschränkende Bedingungen hinzufügt, wie von *Abel* nachgewiesen wurde; siehe *Oeuvres complètes,* Christiania 1871, Bd. 1, S. 224. Vergl. *Du Bois-Reymond, Notiz über einen Cauchy'schen Satz,* etc., Math. Ann. Bd. 4.

Unrichtig ist auch der Satz in Bezug auf die Differentiation von Reihen, den *Duhamel, Journal de Liouville,* XIX, S. 118 aufstellt und den *Bertrand, Calcul différentiel,* S. 271 wiederholt:

„Lorsqu'une série $u_0 + u_1 + \cdots$, dont tous les termes sont réels et fonctions d'une même variable x, est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites x_1 et x_2, et devient discontinue pour une valeur particulière $x = a$, de telle sorte que pour $x = a - \varepsilon$ et $x = a + \varepsilon$ la différence des valeurs qu'elle acquiert reste finie quand ε est infiniment petit, la série des dérivées $\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \cdots$ est divergente pour $x = a$."

Um sich von seiner Unrichtigkeit zu überzeugen, setze man z. B.

$$f(x, n) = \frac{(nx)^2}{1 + (nx)^2} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}.$$

Man findet leicht, dafs

$$\text{für } x > 0, \quad \lim_{n=\infty} f(x, n) = 1,$$

$$\text{für } x < 0, \quad \lim_{n=\infty} f(x, n) = -1,$$

$$\text{für } x = 0, \quad \lim_{n=\infty} f(0, n) = 0 \text{ ist,}$$

und dafs überdies die Derivierte $f'_x(0, n) = 0$ ist. Man denke sich nun die Reihe, in welcher die Summe der ersten n Glieder gerade $f(x, n)$ ist, also

$$f(x, 1), f(x, 2) = f(x, 1), f(x, 3) - f(x, 2) \ldots;$$

sie konvergiert für alle Werte von x und hat 1, 0 bez. -1 zur Summe, je nachdem x positiv, Null oder negativ ist; die Summe der betrachteten Reihe ist daher für $x = 0$ diskontinuierlich und die aus den Derivierten der Glieder für $x = 0$ gebildete Reihe, also

$$0, 0, 0$$

ist trotzdem konvergent. Auf die Unrichtigkeit dieses Satzes wurde schon von *Dini* und *Darboux* hingewiesen.

N. 97.

Beisp. 4. Diese Formel wurde von *Jac. Bernoulli, Ars conjectandi,* S. 97 gegeben. Sehr viele Autoren beschäftigten sich mit ihr. Man findet sie zum grofsen Teil zitiert in Bd. 8 der *Annales scientif. de l'Éc. Norm. sup.,* 2. Serie, S. 55 u. ff.

7. Siehe *Catalan, Nouv. Ann.,* 1. Serie, Bd. 17, S. 434 und Bd. 18, S. 152 und 197; *Realis, Nouv. Ann.,* 2. Serie, Bd. 7, S. 159.

10 und *11.* Einen sehr eleganten Beweis dieser Sätze hat *Laurent* gegeben, *Nouv. Ann.,* 1862, S. 127.

20—27. Siehe *Euler, Introductio* etc. Kap. 9, 10 und 11, wo man noch viele andere unendliche Produkte und Reihen findet.

Die Schlufsfolgerungen *Euler's* sind übrigens heute der neu eingeführten Definitionen wegen nicht mehr ausreichend.

28. Siehe *Euler*, *Introductio* etc., Kap. 15.

N. 99.

In Bezug auf die Kontinuität der Funktionen mehrerer Variablen verdient eine unrichtige Behauptung in *Cauchy's* *Cours d'Analyse,* S. 37 erwähnt zu werden:

„Soit ... $f(x, y, z \ldots)$ une fonction de plusieurs variables, $x, y, z, \ldots$, et supposons que, dans le voisinage des valeurs particulières $X, Y, Z, \ldots$ attribuées à ces variables, $f(x, y, z, \ldots)$ soit à-la-fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z, etc. On prouvera aisément que, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à $x, y, z, \ldots$ les valeurs $X, Y, Z, \ldots$, ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

sera elle-même infiniment petite."

Aus Beisp. 2 der N. 123 ergibt sich die Unrichtigkeit dieses Satzes.

N. 103.

Ein sehr einfaches Beispiel einer Funktion zweier Variabelen, bei welcher es nicht erlaubt ist, die Reihenfolge der Differentiationen zu vertauschen, wird in N. 123, 5 gegeben.

Ein anderes weniger einfaches Beispiel findet man in *Harnack, Diff.- u. Int.-R.*, S. 97 und *Dini, Lezioni di analisi infinitesimale,* Pisa 1877—78, I, S. 127.

N. 109.

Irrtümlicher Weise nimmt *Serret*, *Calcul* etc., Bd. 1, S. 194 an, die Taylor'sche Formel gelte auch für die Funktionen mehrerer Variablen, ohne die *Kontinuität* der Derivierten n^{ter} Ordnung vorauszusetzen. Diese Kontinuität, welche für die Funktionen einer einzigen Variabelen nicht nötig war, ist es für die von mehreren, weil in dem Beweis zusammengesetzte Funktionen differenziert werden, wobei gerade die Kontinuität der Derivierten vorausgesetzt wird. (Vergl. N. 106.)

Um zu erkennen, dafs die Formel nicht mehr gültig ist, wenn die Derivierten diskontinuierlich sind, betrachte man die Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

wobei die Wurzelgröfse immer positiv genommen und $f(0, 0) = 0$

gesetzt wird. Sie ist für alle Werte der Variabelen eine stetige Funktion und hat zu partiellen Ableitungen

$$f'_{(x)}(x,\, y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad f'_{(y)}(x,\, y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

für alle Werte von x und y mit Ausnahme der Stelle $(0,\, 0)$, wo beide Ableitungen 0 sind. Wendet man auf diese Funktion die Formel

$$\begin{aligned} f(x_0+h,\, y_0+k) = f(x_0,\, y_0) &+ h\, f'_{(x)}(x_0+\Theta h,\, y_0+\Theta k) \\ &+ k\, f'_{(y)}(x_0+\Theta h,\, y_0+\Theta k) \end{aligned}$$

an und setzt darin $x_0 = y_0 = -a$, $h = k = a + b$, so erhält man

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} + (a+b)\,[f'_{(x)}(t,\, t) + f'_{(y)}(t,\, t)],$$

wobei $t = x_0 + \Theta h = y_0 + \Theta k$ ist. Man hat aber

$$f'_{(x)}(t,\, t) = f'_{(y)}(t,\, t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ 0,\ +\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

je nachdem $t \lesseqgtr 0$ ist. Es würde daraus also folgen

$$\frac{b-a}{b+a} = -1,\ 0,\ +1,$$

was widersinnig ist, weil a und b willkürliche Gröfsen sind.

N. 110 u. ff.

Siehe *Dini, Analisi inf.*, I, S. 153.

N. 121.

Siehe *Euler, Mechanica,* 1736, Bd. 2, § 106, 497 und *Calc. diff.*, § 225. Man beachte den Beweis der Umkehrung des Eulerschen Satzes.

Die Beziehungen zwischen den successiven Derivierten verdankt man *Lacroix, Calc. diff.*, § 292.

N. 122.

Die Funktionaldeterminanten wurden von *Jacobi* studiert, *De determinantibus functionalibus,* Crelle's Journal, Bd. 22, S. 319. Siehe auch seine *Vorlesungen über Dynamik,* S. 100. *Cayley*, *Crelle's Journal,* Bd. 52, S. 276 nannte sie *Jacobian.* Die den Derivierten entsprechende Bezeichnung rührt von *Donkin* her. Siehe *Baltzer, Determinanten,* Leipzig 1875, S. 127.

Die Hesse'sche Determinante wurde von *Hesse* untersucht, *Crelle's Journal*, Bd. 28, S. 84 und erhielt ihren Namen von *Sylvester*, siehe *Baltzer*, ebenda, S. 134.

In bezug auf diese Determinanten verdient ein unrichtiger Satz Erwähnung, den *Bertrand, Calcul diff.*, S. 63 aufgestellt hat. Er lautet:

Wenn $y_1, y_2, \ldots y_n$ Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind und man den x, n Systeme von Zuwächsen gibt, von denen das eine $\Delta_i x_1, \Delta_i x_2, \ldots \Delta_i x_n$ sei und die entsprechenden Zuwächse der y berechnet, die $\Delta_i y_1, \Delta_i y_2, \ldots \Delta_i y_n$ seien, so hat das Verhältnis der mit den Δy gebildeten Determinante zu der mit den Δx gebildeten die Funktionaldeterminante der y in Bezug auf die x zur Grenze, falls man die Δx der Null zustreben läfst.

Nimmt man z. B. $n = 2$, so verschwindet die Determinante $\begin{vmatrix} \Delta_1 x_1 & \Delta_1 x_2 \\ \Delta_2 x_1 & \Delta_2 x_2 \end{vmatrix}$, wenn man z. B. $\Delta_1 x_1 = \Delta_1 x_2$ und $\Delta_2 x_1 = \Delta_2 x_2$ setzt. Diese Annahme kann man aber machen, ohne dafs dadurch das Kleinwerden der Δx verhindert wird; die Determinante $\begin{vmatrix} \Delta_1 y_1 & \Delta_1 y_2 \\ \Delta_2 y_1 & \Delta_2 y_2 \end{vmatrix}$ verschwindet aber für diese Werte der Δx im allgemeinen nicht; das Verhältnis der beiden Determinanten nimmt daher für beliebig kleine Werte der Δx beliebig grofse Werte und auch den Wert ∞ an; es strebt daher überhaupt keiner Grenze zu.

Man kann beweisen, dafs der Satz nur in folgenden, ganz speziellen Fällen richtig ist: 1) Wenn die gegebenen Funktionen durch eine lineare Relation mit konstanten Koefficienten verbunden sind, so dafs die Determinante des Zählers identisch verschwindet. 2) Wenn die y Quotienten linearer Funktionen der x sind, die alle denselben Nenner haben. Geometrisch besagt der letztere Fall: Deutet man die x als Cartesische Punktkoordinaten in einem R_n, die y als Punktkoordinaten eines zweiten R_n, so ist der Bertrandsche Satz richtig, wenn zwischen den beiden Räumen eine projektive Beziehung besteht.

N. 124—126.

Man findet in vielen Büchern der Analysis bei den Sätzen und Beweisen, die sich auf die vieldeutigen Symbole beziehen, Ungenauigkeiten, auf die wir aufmerksam machen müssen. So sagt z. B. *Serret*, *Calcul*, I, N. 124: Wenn die beiden gegebenen Funktionen der Null zustreben und eine bestimmte Ableitung haben, so strebt das Verhältnis der Funktionen und das Verhältnis der

Derivierten demselben Grenzwert zu oder wachsen beide über jede Grenze hinaus. Es wird aber nur bewiesen, daſs, wenn das Verhältnis der Derivierten einem Grenzwert zustrebt (und wenn $\psi'(x)$ in den Nachbarschaften des betrachteten Wertes nicht Null ist), auch das Verhältnis der Funktionen derselben Grenze zustrebt, und daraus wird abgeleitet, daſs, wenn das Verhältnis der Funktionen einer Grenze zustrebt, das Verhältnis der Derivierten nicht einer davon verschiedenen Grenze zustreben kann; es wird aber nicht bewiesen, daſs das Verhältnis der Derivierten einer Grenze zustrebt.

Daſs man dieses nicht beweisen kann, zeigen die folgenden Beispiele:

Die Funktionen seien $x^2 \sin\frac{1}{x}$ und x; ihr Verhältnis nähert sich der Null, wenn x der Null zustrebt; sie haben Derivierte für alle Werte von x, aber (vergl. N. 40, Beisp. 9) das Verhältnis der Derivierten nähert sich überhaupt keinem Grenzwert.

In diesem Beispiel hat die erste Funktion eine unstetige Ableitung für $x = 0$. Es ist jedoch leicht, ein anderes Beispiel zu bringen, in welchem die Ableitungen der beiden Funktionen stetig sind.

Man betrachte die Funktionen $x^2 f(x)$ und x^2, worin $f(x)$ eine Funktion ist, deren Bestimmung wir uns vorbehalten. Das Verhältnis der Funktionen ist $f(x)$; ihre Derivierten sind

$$2x\, f(x) + x^2 f'(x) \quad \text{und} \quad 2x$$

und ihr Verhältnis

$$f(x) + \frac{1}{2} x\, f'(x).$$

Man wähle nun $f(x)$ so, daſs

1) an der Stelle $x = 0$ ein Grenzwert der $f(x)$ existiert,

2) $f(x)$ für alle Werte von x, mit Ausnahme der Stelle $x = 0$ eine Ableitung

$$f'(x)$$

besitzt,

3) daſs $f'(x)$ und $x\, f'(x)$ bei der Annäherung an die Stelle $x = 0$ überhaupt keinen Grenzwert besitzen,

4) daſs $x^2 f(x)$ für $x = 0$ den Grenzwert 0 erhält.

Allen diesen Bedingungen genügt z. B. die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin\frac{1}{x^4}\, \frac{dx}{x}.$$

Man findet, daſs das Verhältnis der beiden gegebenen Funktionen an der Stelle $x = 0$ einen Grenzwert hat, daſs beide Funktionen für alle Werte von x eine bestimmte stetige Ableitung besitzen, daſs aber das Verhältnis der Ableitungen für $x = 0$ sich überhaupt keiner Grenze nähert.

Ferner wird der Satz über das vieldeutige Symbol $\frac{\infty}{\infty}$ später von *Serret* unvollständig bewiesen, weil er a priori die Existenz der gesuchten Grenze voraussetzt. Denselben unvollständigen Beweis gibt auch *Sturm, Analyse,* I, S. 152; *Hermite, Analyse,* S. 200; *Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis*, Braunschweig 1881, S. 143. Die Dunkelheit in dieser Frage wird noch von *Sturm* erhöht, ebenda, S. 156, wo er sagt, daſs „avant d'appliquer les règles il faudra bien s'assurer que l'expression proposée, ainsi que $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ approche d'une limite."

Vergl. *Stolz*, *Über Grenzwerte der Quotienten*, Math. Ann. Bd. 14, S. 231 und Bd. 15, S. 556; *Rouquet*, *Nouvelles Annales de Math.*, 2. Serie, Bd. 16, S. 113.

N. 129—130.

Die Resultate in diesen Nummern verdienen Beachtung, weil sie sich auf Sätze beziehen, die in einer groſsen Anzahl von Büchern schlecht aufgestellt und bewiesen werden. So sagt man häufig: der Grenzwert des Verhältnisses des Zuwachses in einer Funktion von mehreren Variabelen zu ihrem totalen Differential sei die Einheit (*Sturm, Analyse,* N. 102; *Jordan, Analyse,* N. 19, 22, etc.); und: in der Taylor'schen Formel für die Funktionen mehrerer Variabelen habe bei der Annäherung der Zuwächse der Variabelen an Null das Verhältnis des Restes nach einem Glied zu dem Glied selbst Null zur Grenze (*Jordan, Annal.,* N. 203; *Serret, Calcul,* N. 134, 152, etc.; *Bertrand, Calcul*, I, S. 392). Vergl. auch *Todhunter*, *A treatise on the differential calculus*, London 1878, S. 122 ff.

Daſs diese Sätze unrichtig sind, geht offenbar aus den verschiedenen Theoremen in N. 130 hervor. Freilich setzen diese Autoren, wie z. B. bei der Taylor'schen Formel, oft voraus, daſs die Verhältnisse der Zuwächse der Variabelen unbestimmt bleiben; alsdann ist aber der Begriff der Grenze einer Funktion von mehreren Variabelen nicht mehr bestimmt. Übrigens nehmen sie bei den Anwendungen der Taylor'schen Formel auf die Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Variabelen und auf die singulären Punkte der Kurven thatsächlich an, man könne eine Gröſse η so bestimmen, daſs, wenn man den Variabelen kleinere Zuwächse als η erteilt, das Verhältnis des Restes nach einem Glied zu dem Glied selbst beständig kleiner als eine willkürlich festgesetzte Gröſse ε bleibe, d. h. also sie legen dem Wort „Grenze" denselben Sinn bei, wie wir.

N. 133—136.

Die Beweise für die Merkmale zum Erkennen der Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Variabelen, welche die meisten Bücher geben, beruhen auf dem Satz, daſs in der Taylor'schen Formel für die Funktionen mehrerer Variabelen das Verhältnis des nach einem beliebigen Glied bleibenden Restes zu dem Glied selbst bei der Annäherung der Zuwächse der Variabelen an Null zur Grenze Null habe. Dieser Satz ist im allgemeinen falsch, wenn das betrachtete Glied keine definite Form in Bezug auf die Zuwächse der Variabelen ist, und wenn es eine definite Form ist, so bedarf der Satz des Beweises.

Unrichtig ist das von *Serret, Calcul*, S. 219 aufgestellte Kriterium: „le maximum ou le minimum *a lieu* si, pour les valeurs de h, k, ... qui annulent $d^2 f$ et $d^3 f$, $d^4 f$ a constamment le signe — ou le signe $+$."

Um sich von der Unrichtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, betrachte man z. B. die ganze Funktion

$$f(x, y) = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx),$$

in der $p > q > 0$ ist. Setzt man $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, so erhält man

$$f(h, k) = 4pqh^2 - 2(p + q)hk^2 + k^4.$$

Das System der Glieder zweiten Grades ist positiv für alle Werte von h und k mit Ausnahme des Wertes $h = 0$, für welchen die Glieder dritten Grades verschwinden, und das Aggregat der Glieder vierten Grades ist positiv. Nach dem Kriterium *Serret*'s hätte also $f(x, y)$ für $x = 0$ ein Minimum. Man erkennt aber leicht, daſs dies nicht der Fall ist. Man setze $y^2 = 2lx$, nähert sich dann x der Null, so strebt auch y der Null zu; man erhält

$$f(x, \sqrt{2lx}) = 4(l - p)(l - q)x^2.$$

Diese Gröſse ist ganz nach unserem Belieben positiv oder negativ, je nachdem l auſserhalb oder innerhalb des Intervalls (p, q) liegt; die Funktion f nimmt daher in jeder Umgebung der Stelle $(0, 0)$ positive und negative Werte an, d. h. also Werte, die gröſser und kleiner als $f(0, 0) = 0$ sind und f ist mithin weder ein Maximum noch ein Minimum.

Denselben Irrtum begeht auch *Bertrand*, *Calcul*, etc., S. 504 und *Todhunter*, *A tr. on the diff. calc.*, London 1878.

N. 141 u. ff.

Einen groſsen Teil der Sätze über die komplexen Variabelen hat *Cauchy* aufgestellt und geordnet, *Anal. alg.*, Kap. 7 u. ff.

N. 145.

Der Satz über die Multiplikation zweier unendlicher Reihen ist auch unter anderen Bedingungen gültig. S. N. 160 am Ende; *Pringsheim*, *Multiplikation bedingt konvergierender Reihen*, Math. Ann. XXI; *Mertens*, *Crelle's Journal*, Bd. 79, S. 182.

N. 146.

Die Beziehungen zwischen den trigonometrischen und Exponentialfunktionen verdankt man *Joh. Bernoulli*, obwohl sie zuerst von *Euler*, *Introductio* etc., S. 104 veröffentlicht wurden.

N. 148.

Historische Angaben über die hyperbolischen Funktionen findet man in einer Abhandlung *Hoüel's*, *Nouv. Ann.*, 1864, S. 417.

N. 154.

Die Bedingungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sind für die Existenz der Derivierten nötig und ausreichend. Die Bedingungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ sind ebenfalls nötig, aber nicht ausreichend, wie *Königsberger* irrtümlicher Weise behauptet, *Th. d. Elliptischen Funkt.*, Leipzig 1874, S. 17 und 18.

N. 160.

Das Theorem auf S. 238 wurde von *Abel* aufgestellt und bewiesen, *Oeuvres*, I, S. 223. Der Beweis im Text ist mit dem *Abel*'schen identisch. Den Satz hat *Frobenius* etwas erweitert, *Crelle's Journal*, Bd. 89, S. 262.

N. 168.

Die Integration rationaler algebraischer Funktionen mittelst Zerlegung in Partialbrüche verdankt man *Joh. Bernoulli*, *Opera omnia*, Bd. 1, S. 393. Die Theorie wurde in der Folge verbessert und die Regeln zur Bestimmung der konstanten Zähler (die nach *Bernoulli* dadurch bestimmt werden, dafs man die Nenner verschwinden läfst und die Koeffizienten derselben Potenzen von x einander gleich setzt) von *Euler*, *Cauchy*, etc. vereinfacht.

N. 174.

Die Zerlegung des Bruches $\frac{F(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$ in einfache Brüche hat *Euler* behandelt, Bd. 1 der *Mémoires de Pétersbourg*, 1809 und

Introductio in Analysin, I, S. 23; *Crelle's Journal* Bd. 9 und 10; *Clausen*, ebenda, Bd. 8; *Jacobi*, ebenda, Bd. 15, S. 108. Siehe auch *Trudi*, *Giornale di Matem.*, Bd. 2, S. 225 und *Baltzer*, *Determinanten*, Leipzig 1875, S. 109.

Die Zerlegung des Integrals einer rationalen Funktion in seinen rationalen und transcendenten Teil, wie es in dieser Nummer geschehen ist, verdankt man *Hermite*, *Nouvelles Annales*, 1872, S. 145 und *Annales de l'École norm. sup.*, 2. Serie, 1872, Bd. 1, S. 214.

N. 193.

Diese Definition des bestimmten Integrals ist mit derjenigen gleichwertig, die *Riemann* gibt, *Ges. Werke*, S. 213; doch scheint es etwas einfacher zu sein, das bestimmte Integral als die untere Grenze gewisser Summen und die obere Grenze anderer anzusehen, wie es als Grenze aufzufassen, welcher sich eine Summe nähert. Einen elementaren, im Text nicht gegebenen, Beweis des Satzes, daſs, wenn $S_1 = S_2$ ist, ihr gemeinschaftlicher Wert die Grenze ist, der die Summe in N. 192, Zus. zustrebt, findet man in einer Abhandlung des Verfassers in den *Atti dell' Acc. delle Scienze di Torino*, April 1883.

N. 194—197.

Von den vier Sätzen in N. 194 reichen die drei ersten, die sich schon bei *Euclid* vorfinden, aus, um die Gleichheit oder Ungleichheit ebener Vielecke zu erkennen. Der vierte, dessen sich implicite auch Euclid bedient, wird klar als *Postulat* mehrere mal von *Archimedes* aufgestellt: in seinen Büchern *über die Kugel und den Cylinder*, Postulat 5, *über die Spiralen*, in der Vorrede und speziell in der Vorrede zur *Quadratur der Parabel*; der Satz ist notwendig, um über die Gleichheit von Flächen entscheiden zu können, die sich nicht in kongruente Teile zerlegen lassen. Vergl. *Stolz*, *Zur Geometrie der Alten*, *insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, Math. Ann., XXII; siehe auch *De Zolt*, *Principi della eguaglianza di poligoni*, Mailand.

Unabhängig von jedem Postulat geht unter der Voraussetzung, daſs man jede ebene von einem Polygon begrenzte Fläche zu messen versteht, aus N. 195 hervor: Nimmt man beliebig eine Zahl an, die gröſser als $\int_a^b f(x)\,dx$ ist, so kann man eine polygonale Fläche bilden, die von dieser Zahl gemessen wird und in ihrem Innern die gesuchte Fläche enthält, und nimmt man eine Zahl an, die kleiner als dieses Integral ist, so läſst sich eine polygonale Fläche bilden, die von dieser Zahl gemessen wird und in dem Innern der gegebenen Fläche liegt. Analog verhält es sich mit den Volumina und den Bogen von Linien.

Man vergl. auch N. 4 des Textes.

N. 200.

Die Entwickelung von $\frac{\pi}{2}$ in ein unendliches Produkt, das erste Beispiel unendlicher Produkte, wurde von *Wallis* (1616—1703) gegeben, *Arithmetica infinitorum.*

Das Studium des Begriffs der Zahl ist in den letzten Jahren besonders eifrig betrieben worden. Ein zu diesem Zweck eigens hergestelltes Hilfsmittel ist die „mathematische Logik“. Wir halten es deshalb für zweckmäfsig, die beiden Anhänge hier folgen zu lassen, von denen der erste die mathematische Logik behandelt, welche später benutzt werden soll, und der zweite die wesentlichsten Definitionen über die Zahlen enthält.

Anhang I.

Über mathematische Logik.

(Aus den Akten der Turiner Akademie der Wissenschaften, Bd. 32.)

Schon seit vielen Jahren beschäftigt sich der Verfasser mit diesen äufserst interessanten Studien. In dem *Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva,* 1888 gab er eine kurze Übersicht über die Untersuchungen *Schröder's* in seinem *Operationskreis des Logikkalküls*, 1877, sowie über die von *Boole* und anderen Autoren. Er wies darin die Identität des Kalküls der Klassen, wie ihn diese Schriftsteller aufstellen, mit dem Kalkül der Lehrsätze nach, wie man ihn bei *Peirce*, *McColl* etc. findet.

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchungen in den *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* 1889 gelang es, eine vollständige Analyse der Operationen der Logik zu erhalten und sie auf eine sehr beschränkte Anzahl zu reduzieren, die er mit den Symbolen: ε, $\supset$, $=$, $\frown$, $\smile$, $\sim$, Λ bezeichnet hat.

Als Resultat dieser Zerlegung der Begriffe ergab sich die Herstellung einer symbolischen oder ideographischen Schrift (Begriffsschrift), mit deren Hülfe sich alle Begriffe der Logik darstellen lassen. Ebenso liefse sich durch Einführung von Symbolen zur

Darstellung der Begriffe anderer Wissenschaften jede Theorie symbolisch wiedergeben[1]. In dem kleinen Buche wurde zum ersten Mal eine ganze Lehre in Symbolen ausgedrückt; wir haben gerade diese Symbole gewählt, um das in der Arithmetik Definierbare von dem nicht Definierbaren, das Beweisbare von dem nicht Beweisbaren zu unterscheiden.

Dasselbe analytische Hilfsmittel benützte der Verfasser auch in den späteren Werken:

Principii di Geometria, logicamente esposti, Turin, Bocca, 1889.

Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles, Mathematische Annalen, 1890, S. 182.

Sur la définition de la limite d'une fonction, American Journal, 1894, etc.

Prof. *Burali-Forti* giebt in seiner *Logica matematica*, Mailand, Höpli, 1894 eine Darstellung der neuen Methode und bedient sich ihrer in vielen Arbeiten, wie z. B.:

Sulle classi derivate a destra e a sinistra, Akten der Turiner Akademie, 1894.

Sul limite delle classi variabili, ebenda, 1895.

Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles, Mathematische Annalen, 1895, etc.

Prof. *Pieri* verwendet das nämliche Mittel in einer Reihe von Arbeiten, welche die oben genannte Akademie veröffentlichte, zur Analyse der Prinzipien der Geometrie der Lage.

Seit einigen Jahren besteht eine Gesellschaft, welche das *Formulaire de Mathématiques* herausgiebt, dessen *Introduction* 1894 erschien. Der erste Band wurde 1892 begonnen und 1895 beendigt. Das Werk ist dazu bestimmt, die Lehrsätze, Definitionen und Beweise verschiedener mathematischer Theorien in logischen Symbolen zu bringen.

Mitarbeiter sind die Herren *Vailati, Castellano, Burali, Giudice, Vivanti, Bettazzi* und *Fano,* zu welchen noch andere kommen, die sich mit Beiträgen und Korrekturen beteiligen. Im Augenblick ist der zweite Band unter der Presse; viele Schwierigkeiten verzögern jedoch sein Erscheinen.

Die Ideographie, wie sie sich aus dem Studium der mathematischen Logik ergiebt, ist nicht lediglich eine konventionelle abgekürzte Schreibweise oder Geschwindschreibung. Denn unsere

---

1) Bis jetzt kann man mittelst der Ideographie oder Begriffschrift die Sätze der Logik und einiger mathematischen speziell algebraischen Theorien ausdrücken. Will man auch andere Theorien in Zeichen übertragen, so gehört dazu eine vollständige Analyse der auftretenden Begriffe und ihre Reduktion auf Symbole. Die Ideographie zur Darstellung z. B. sämtlicher Sätze der Mathematik ist also erst teilweise hergestellt.

Symbole stellen nicht Worte dar, sondern Begriffe. Man hat darum dasselbe Symbol zu schreiben, wo derselbe Begriff auftritt, der in der gewöhnlichen Sprache benutzte Ausdruck mag sein wie er will; man hat verschiedene Symbole zu setzen, wenn auch vielleicht nur ein einziges Wort existiert, das seiner Stellung wegen verschiedene Begriffe ausdrückt. Wir stellen also einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Begriffen und den Symbolen her, wie er in unseren Sprachen nicht besteht. Diese Ideographie beruht auf Theoremen der Logik, welche nach und nach mit *Leibniz* beginnend bis in die neueste Zeit entdeckt wurden. Man kann die Form der Symbole ändern, d. h. die wenigen Zeichen, die zur Darstellung der Grundbegriffe dienen, aber zwei ihrem Wesen nach verschiedene Ideographien kann es nicht geben.

Wir haben einige Arbeiten erwähnt, in welchen die Ideographie benutzt wird, und werden sie, in soweit keine zwei verschiedenen Ideographien bestehen können, aus dem folgenden Grund als *die unsrige* in Anspruch nehmen.

Herr *G. Frege*, Professor an der Universität zu Jena, dem wir interessante Arbeiten über mathematische Logik (von denen die erste 1879 erschien) verdanken, ist auch seinerseits und auf vollständig unabhängigem Weg[1]) in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik*, 1893 dazu gekommen, eine Reihe von Sätzen über den Begriff der Zahl symbolisch darzustellen. Über dieses Buch schrieben wir einen kurzen Bericht in der *Rivista di Matematica*, 1895, S. 122. Neuerdings hat nun derselbe Autor eine Abhandlung: *Über die Begriffschrift des Herrn Peano und meine eigene*, Berichte d. math.-phys. Classe der Gesellschaft etc. zu Leipzig, 6. Juli 1896 veröffentlicht, worin er das Formular und seine Einleitung lediglich erwähnt und bezweifelt, ob unsere Ideographie zum Ausdrücken auch nur von Sätzen brauchbar sei, während doch aus den oben angeführten Arbeiten ihre Bedeutung als Mittel für Schlufsfolgerungen hervorgeht.

Wir müssen die rein sachliche Art der Urteile des Herrn Frege in der erwähnten Schrift anerkennen; wenn wir auch in vielen Punkten miteinander übereinstimmen, so gehen doch unsere Ansichten über viele Fragen in Folge der verschiedenen Bedeutung, die wir bestimmten Worten und Symbolen beilegen, auseinander.

---

1) Die Arbeiten *Frege's* sind unabhängig von denen der zahlreichen Schriftsteller über mathematische Logik. Man sehe z B. *Symbolic Logic* von *Venn*, London, 1894, S. 493. Wir sind daher nicht im Stande zu entscheiden, ob seine Ideographie vollständig ist oder nicht, d. h. ob seine in symbolischer Sprache ausgedrückten Sätze sich ohne den begleitenden Text verstehen lassen. Die Formeln *Frege's* sind, für uns wenigstens, weit schwieriger verständlich, als die der anderen Schriftsteller.

Betrachtet man die Ideographie aber auch nur als eine symbolische Schrift, zu dem Zweck alle Sätze der Mathematik in kurzer und präziser Form darzustellen, so fällt auch dann schon ihre Bedeutung ins Auge. Das Kriterium, ob sie als Sprache dienen kann, entscheidet zugleich darüber, ob sie vollständig ist oder nicht.

Zwischen den Begriffen der Logik bestehen zahlreiche Beziehungen, welche in den Theoremen oder Formeln der Logik ihren Ausdruck finden. Wir haben eine Sammlung der *Formule di Logica matematica* in der „Rivista di matematica", 1891 veröffentlicht. Durch neue Formeln und zahlreiche historische Hinweise vervollständigt, die grofsen Teils dem Dr. *Vailati* zu verdanken sind, bildet sie den Teil I des *Formulaire*, Bd. 1. Zahlreiche Zusätze sind uns von verschiedenen Korrespondenten angekündigt worden und eine neue Auflage wird immer wünschenswerter.

Viele dieser Formeln haben nun die Gestalt von Gleichheiten, welche in dem einen Teil ein Zeichen haben, das in dem anderen entweder nicht oder doch in verschiedener Stellung vorkommt. So gestaltete Gleichheiten erlauben dieses Zeichen mittelst der anderen auszudrücken, d. h. man kann die anderen als Definition dieses Zeichens ansehen. Auf diese Art lassen sich bei geeigneten Definitionen die Begriffe der Logik auf eine immer kleinere Anzahl von Grund- oder ursprünglichen Begriffen zurückführen, die man in der gewöhnlichen Sprache ausdrücken und durch Beispiele erläutern mufs, die sich aber durch andere noch einfachere symbolisch nicht mehr darstellen lassen. Diese Reduktion der Begriffe der Logik auf Grundbegriffe bietet aber ernste Schwierigkeiten dar und es ist leichter, die Anzahl und Art der zu Grunde liegenden Begriffe in der Arithmetik und Geometrie als in der Logik zu ermitteln.

Wir werden im folgenden die Reduktion der Begriffe der Logik auf ihre geringste Zahl behandeln. Nachdem die Bedeutung einiger Symbole mit Hülfe der gewöhnlichen Sprache festgestellt ist, sollen alle anderen Sätze nur in Symbolen geschrieben werden, ohne dafs ein Mifsverständis entstehen könnte oder dafs eine Erklärung durch Worte nötig wäre. Die Formeln für sich allein bilden also einen verständlichen Text. Jedoch wollen wir durch eingeschaltete Erläuterungen und Bemerkungen in gewöhnlicher Sprache das Verständnis zu erleichtern suchen.

Die Grundbegriffe.

Die hier folgenden Vereinbarungen, die wir mittelst der gewöhnlichen Sprache erklären müssen, stellen Grundbegriffe dar.

1. Die Buchstaben a, b, ... x, y, z bezeichnen beliebige Dinge, die sich ändern, wenn der Satz sich ändert.

2. Eine Formel wird durch Klammern oder auch durch Punkte in Teile zerlegt. So sind z. B. die Formeln

$$ab \,.\, c, \quad a \,.\, bc, \quad ab \,.\, cd, \quad ab \,.\, cd : e \,.\, fg$$

äquivalent mit

$$(ab)c, \quad a(bc), \quad (ab)(cd), \quad [(ab)(cd)][e(fg)].$$

3. K oder Cls bedeutet „Klasse".

4. a sei eine K; $x \,\varepsilon a$ bedeutet „x ist ein a".

5. p und q seien Sätze, welche variabele Buchstaben $x, \ldots z$ enthalten. Die Formel

$$p \supset_{x, \ldots z} q$$

bedeutet „$x, \ldots z$ mögen beliebige Werte haben; wenn sie der Bedingung p genügen, so genügen sie der Bedingung q". Die Indices an dem Zeichen $\supset$ kann man weglassen, wenn ein Mifsverständnis ausgeschlossen ist.

6. pq bezeichnet die gleichzeitige Aufstellung der Sätze p und q.

Die erste Vereinbarung über die variabelen Buchstaben ist uns aus der Algebra und Geometrie geläufig. Sie wurden schon von Aristoteles in der Logik benutzt. Es ist jedoch nötig, sie sowohl wie die über die Klammern hier aufzuführen, da wir alle Vereinbarungen, von denen wir Gebrauch machen, aufzählen wollen.

Die durch unsere Symbole dargestellten Begriffe sind die einfachsten und haben nicht den genauen Wert der entsprechenden Ausdrücke der gewöhnlichen Sprache, welche kompliziertere Begriffe darstellen. So kann man das Zeichen ε lesen „ist ein" oder lateinisch „est", es stellt aber den Begriff dar, welchen der Ausdruck „est" hat, wenn man von der Art und Weise, der Zeit und der Person abstrahiert. Da mithin die Symbole den Ausdrücken der gewöhnlichen Sprache nicht genau entsprechen, so lernt sich der genaue Wert der Symbole besser und leichter aus Beispielen.

Wir wollen die Beispiele der Arithmetik entnehmen und gebrauchen dabei die Symbole

N für „Zahl" (ganze und positive),
Np für „Primzahl",
$\mathrm{N} \times a$ für „Vielfaches von a".

Beispiele:

$$7 \varepsilon \mathrm{Np}, \quad 12 \varepsilon \mathrm{N} \times 4,$$

$$a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a(a+1)(a+2) \varepsilon \mathrm{N} \times 6.$$

„Es sei a eine Zahl; das Produkt $a(a+1)(a+2)$ ist ein Vielfaches von 6."

$$a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, \supset \,.\, (a-1)! + 1 \varepsilon \mathrm{N} \times a.$$

„Ist a eine Primzahl, so ist der aufgeschriebene Ausdruck ein Vielfaches von a“ (Wilson).

An dem Zeichen $\supset$ hat man sich hier als Index den Buchstaben a hinzuzudenken. Diese Sätze bestehen aus drei Teilen, der Hypothese, dem Ableitungszeichen und der These.

$$x \varepsilon \mathrm{N} \,.\, x < 17 \,.\, \supset \,.\, x^2 - x + 17 \,\varepsilon \mathrm{Np}\,.$$

„Die ganze positive Zahl x mag sein, welche sie will; wenn sie nur kleiner als 17 ist, so stellt der Ausdruck $x^2 - x + 17$ immer eine Primzahl dar“ (Legendre).

$$a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b^2 \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\, \supset \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a.$$

„Wenn das Quadrat der Zahl b ein Vielfaches der Primzahl a ist, so mufs auch b ein Vielfaches von a sein“ (Euclid).

Hier ist die Hypothese die gleichzeitige Aufstellung mehrerer Sätze. An dem Zeichen $\supset$ hat man sich als Indices die Buchstaben a und b zu denken.

Wir wollen jetzt ein Beispiel anführen, bei welchem schon die Hypothese das Ableitungszeichen enthält (die neuen arithmetischen Zeichen, die dabei vorkommen, sind leicht zu verstehen):

$$a \varepsilon \mathrm{N} : x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, \supset_x .\, \mathrm{mp}\,(x, a)\, \varepsilon \mathrm{N}_0 \times 2 : \supset \,.\, a \varepsilon \mathrm{N}^2.$$

„Wenn a eine Zahl ist und wenn für jede Primzahl x der Exponent der höchsten Potenz von x, welche in a enthalten ist, eine gerade Zahl (einschliefslich der Null) ist, so mufs a ein vollkommenes Quadrat sein.“

Der richtige Gebrauch des Zeichens $\supset$ ist eng verbunden mit dem der variabelen Buchstaben. Da nach unseren Vereinbarungen die Buchstaben $a, b, \ldots$ beliebige variabele Dinge darstellen, so mufs man in jedem Satz zuerst sagen, welcher Gattung von Dingen sie angehören. Der Satz

$$a \times b = b \times a$$

hat daher für uns keinen Sinn, weil er unvollständig ist. Man mufs vorausschicken, welche Bedeutung die Buchstaben a und b haben und z. B. schreiben

$$a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset \,.\, a \times b = b \times a.$$

Wenn man, anstatt vorauszusetzen, a und b seien ganze Zahlen, annimmt, sie seien Brüche, irrational oder imaginär, so behält die These ihre Gültigkeit; sie wird aber falsch, wenn a und b nicht komplanare Quaternionen sind, und verliert jeden Sinn, wenn a und b Dinge bedeuten, für welche die Multiplikation nicht definiert worden ist.

Man nennt in einer Formel einen variabelen Buchstaben scheinbar (apparente), wenn der Wert der Formel von dem variabelen Buchstaben nicht abhängt. So ist z. B. in $\int_a^b f(x)dx$ der Buchstabe x scheinbar.

In jedem Satz sind die Buchstaben, die als Indices an dem Zeichen $\supset$ stehen oder als solche gedacht werden, scheinbar. So ist

$$x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset_x .\, \mathrm{mp}(x, a) \varepsilon \mathrm{N}_0 \times 2$$

„für jeden Wert der Primzahl x ist der Exponent der höchsten Potenz von x, die in a enthalten ist, eine gerade Zahl" ein Satz, der eine Bedingung für a ausdrückt und nicht für den Buchstaben x, den man durch y ersetzen kann, ohne die Bedingung zu ändern.

Alle Buchstaben, die in einem Theorem vorkommen, sind scheinbar, weil das Theorem eine Wahrheit ausdrückt, die von den gebrauchten Buchstaben nicht abhängt.

Wir haben uns längere Zeit bei dem Zeichen $\supset$ und den bezüglichen Indices aufgehalten, weil eine Differenz zwischen Herrn Frege und uns in dem Gebrauch unserer Symbole besteht.

Das Zeichen $\supset$ mufs nämlich bei uns seinem Wesen nach zwischen Sätzen stehen, welche variabele Buchstaben enthalten.

Herr Frege dagegen führt als Beispiele zum Zeichen $\supset$ die Sätze an

$$2^2 = 4 \,.\supset.\, 3 + 7 = 10,$$

$$2 > 3 \,.\supset.\, 7^2 = 0,$$

worin das Zeichen $\supset$ zwischen Sätzen steht, die variabele Buchstaben nicht enthalten.

Ebenso ist das Beispiel des Herrn Frege

$$x > 2 \,.\supset.\, x^2 > 2$$

nach unserer Ansicht nicht vollständig, weil man bei dem Einführen eines Buchstaben x zuerst sagen mufs, was er vorstellt. Man könnte sein Beispiel vervollständigen, wenn man z. B. schriebe:

$$x \varepsilon \mathrm{N} \cdot x > 2 \,.\supset.\, x^2 > 2.$$

Herr Frege betrachtet Ausdrücke von der Form

$$(\Phi(x) \supset_x \Psi(x, y)) \supset_y \mathrm{X}(y),$$

welche sich ebenfalls in dem Formular nicht vorfinden, weil es bei einer Ableitung wohl vorkommen kann, dafs die Hypothese Buchstaben enthält, die in der These nicht auftreten; niemals aber, dafs in der These Buchstaben sind, welche sich nicht in der Hypothese befinden. Ebenso kommt auch in dem Formular das Beispiel $(2 > 3) = \Lambda$ des Herrn Frege nicht vor.

Definitionen.

Durch Kombination der oben angegebenen Grundbezeichnungen lassen sich abgeleitete Begriffe zusammensetzen, die eine symbolische Definition zulassen. Unter symbolischer Definition eines neuen Zeichens x verstehen wir die Vereinbarung, eine Gruppe von Zeichen, welche eine schon bekannte Bedeutung hat, x zu nennen; wir bezeichnen sie mit

$$x = a \qquad \text{Def.}$$

Wenn das, was definiert wird, nämlich x, variabele Buchstaben enthält und es nötig ist, die Bedeutung dieser Buchstaben mittelst einer Hypothese zu beschränken, so nimmt die Definition die Form an

$$\text{Hypothese} \,.\, \supset .\, x = a \qquad \text{Def.}$$

Die beiden Zeichen $=$ und Def. müssen, obgleich sie getrennt voneinander stehen, als ein einziges Symbol aufgefafst werden; es wird gelesen „ist der Definition nach gleich" oder „wollen wir nennen".

Es sei a eine K; man hat häufig den Satz zu schreiben „x und y sind a's"; wir wollen vereinbaren, diesen Satz symbolisch mit $x, y \varepsilon a$ zu bezeichnen. Da nun dieser Satz der Aufstellung der beiden Sätze $x \varepsilon a \,.\, y \varepsilon a$ äquivalent ist, so setzen wir als Definition:

$$1) \qquad a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset : x, y \varepsilon a \,.=.\, x \varepsilon a \,.\, y \varepsilon a \qquad \text{Def.}$$

Aus diesem Beispiel ergiebt sich klar das gemeinschaftliche Merkmal der Definitionen, dafs sie Abkürzungen sind; wer die Definition nicht anerkennen will, kann überall $x \varepsilon a \,.\, y \varepsilon a$ an Stelle von $x, y \varepsilon a$ schreiben; die Ideographien, die man durch Einführnng bez. Nichteinführung dieser Definition erhielte, wären ihrem Wesen nach durchaus nicht verschieden. Doch bietet die Definition eine nützliche Abkürzung; es empfiehlt sich daher sie anzunehmen.

$$x, y, z \varepsilon a \text{ bedeutet } x, y \varepsilon a \,.\, z \varepsilon a \text{ d. h. } x \varepsilon a \,.\, y \varepsilon a \,.\, z \varepsilon a.$$

a und b seien K's. Wir wollen statt „jedes a ist b" schreiben $a \supset b$ und können diese Schreibweise, wie folgt, symbolisch definieren:

$$2) \qquad a, b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset \,.\because\, a \supset b \,.=:\, x \varepsilon a \,.\, \supset_x .\, x \varepsilon b. \qquad \text{Def.}$$

In der Formel $x \varepsilon a \,.\, \supset_x .\, x \varepsilon b$ „wenn x ein a ist, so ist x auch ein b" ist der Buchstabe x, der als Index an dem Zeichen $\supset$ auftritt, ein *scheinbarer* Buchstabe, d. h. der Wert dieses Satzes hängt von x nicht ab; er drückt vielmehr eine Beziehung zwischen den Buchstaben a und b aus, die wir nach unserer Vereinbarung mit $a \supset b$ bezeichnen und dabei den scheinbaren Buchstaben x weglassen.

Das Zeichen $\supset$ zwischen Klassen kann „ist enthalten", zwischen Sätzen „ergiebt sich" gelesen werden. Daraus, dafs es auf verschiedene Art gelesen werden kann, folgt nicht, dafs es verschiedene Bedeutung hat, sondern nur, dafs die gewöhnliche Sprache mehrere Ausdrücke hat, um denselben Begriff darzustellen. Der Ausdruck, welcher am besten dem Zeichen $\supset$ in seinen verschiedenen Stellungen entspräche, wäre vielleicht „folglich" oder „daher".

Das Beispiel:

$$\mathrm{N} \times 6 \supset \mathrm{N} \times 2$$

„jedes Vielfache von 6 ist ein Vielfaches von 2" oder auch „Vielfaches von 6, folglich Vielfaches von 2" ist eine Anwendung der Definition 2. Will man diese Definition nicht benutzen, so kann man denselben Satz auch schreiben:

$$x \varepsilon \mathrm{N} \times 6 \,.\supset.\, x \varepsilon \mathrm{N} \times 2.$$

„Wenn x ein Vielfaches von 6 ist, so ist x ein Vielfaches von 2." An dem Zeichen $\supset$ hat man sich den Index x hinzuzudenken.

a sei eine K; schreibt man das Zeichen $x\varepsilon$ davor, so ergiebt sich der Satz $x\varepsilon a$, welcher den variabelen Buchstaben x enthält.

Wenn umgekehrt p_x ein Satz ist, der den variabelen Buchstaben x enthält, so wollen wir unter $\overline{x\varepsilon} p_x$ die Klasse der x verstehen, welche der Bedingung p_x genügen. Nennt man mithin diese Klasse a, d. h. also, setzt man

$$a = \overline{x\varepsilon} p_x,$$

so ist der Satz p_x gleichbedeutend mit $x\varepsilon a$

$$x\varepsilon a \,.=.\, p_x.$$

Das über $x\varepsilon$ stehende Zeichen — ist das Inversionszeichen, weil diese Vereinbarung ein spezieller Fall einer anderen über die Funktionen ist. Das ganze Zeichen $\overline{x\varepsilon}$ kann man lesen „die x, welche". In dem Ausdruck $\overline{x\varepsilon} p_x$ ist der Buchstabe x scheinbar.

Will man diesen Satz in Symbolen ausdrücken, so mufs man, weil Symbole nicht gebildet sind, um auszudrücken „p_x sei ein Satz, der den variabelen Buchstaben x enthält", annehmen, der Satz p_x sei auf die Form $x\varepsilon a$ reduziert, worin a eine K ist; wir setzen daher:

3) $$a\varepsilon \mathrm{K} \,.\supset.\, \overline{x\varepsilon}(x\varepsilon a) = a$$ Def.

„Es sei a eine Klasse; setzt man alsdann das Zeichen $\overline{x\varepsilon}$ vor den Satz $x\varepsilon a$, so erhält man wieder die Klasse a." Diese Definition drückt in der That das erste Glied, welches noch keine Bedeutung hat, durch das zweite aus. Jedoch scheint es, als ob sie eine lange Bezeichnung an Stelle einer kurzen setze. Das kommt daher, weil der Satz, der x enthält, in der Form $x\varepsilon a$

geschrieben wurde. Schreibt man ihn in anderer Gestalt, so ist die Definition eine wirkliche Vereinfachung[1]).

a und b seien K's. Mit $a \frown b$ oder auch einfach nur mit ab wird die Klasse von Dingen bezeichnet, die zu gleicher Zeit a und b sind. Das Zeichen $\frown$ entspricht ungefähr dem Verbindungswort „und"; die Operation, welche es darstellt, heifst auch *logische Multiplikation.*

Diese Operation läfst sich definieren

$$4) \qquad a, b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, ab = \overline{x\varepsilon}\,(x\varepsilon a \,.\, x\varepsilon b) \qquad \text{Def.}$$

„Wenn a und b Klassen sind, so versteht man unter ab die Gesamtheit der x, welche der Bedingung $x\varepsilon a \,.\, x\varepsilon b$ genügen."

Operiert man mit dem Zeichen $x\varepsilon$ an beiden Gliedern dieser Gleichung, so erhält man:

$$a, b\varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ} : x\varepsilon ab \,.\, = \,.\, x\varepsilon a \,.\, x\varepsilon b.$$

„Sagt man, x sei ein ab, so heifst das so viel, als x ist ein a und x ist ein b." Jedoch kann diese Gleichheit nicht als Definition des Symbols ab gelten, sondern nur der ganzen Schreibweise $x\varepsilon ab$.

Auf diese Art ist die logische Multiplikation der Klassen definiert worden durch die gleichzeitige Aufstellung der logischen Multiplikation der Sätze, welche als Grundbegriff angenommen wurde, und mittelst des Zeichens $\overline{x\varepsilon}$, das definiert worden ist (Def. 3). Es ist uns jedoch nicht gelungen, die Bedeutung des Zeichens ab ohne Benutzung der Def. 3 zu erklären.

Beispiel:

$$\mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N} + 1)\, \mathrm{Ɔ}\, \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2.$$

„Jede Primzahl von der Form $4x + 1$, worin x ein N bedeutet, ist die Summe zweier Quadrate." Will man die eingeführten Definitionen nicht benutzen, sondern nur Grundbegriffe, so würde man diesen Satz zu schreiben haben

$$x\varepsilon \mathrm{Np} \,.\, x\varepsilon 4\mathrm{N} + 1 \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, x\varepsilon \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2.$$

Wir geben nun die folgende Definition

$$5) \qquad a, b\varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ} : a = b \,.\, = \,.\, a \mathrm{Ɔ} b \,.\, b \mathrm{Ɔ} a \qquad \text{Def.}$$

„Es seien a und b Klassen; man sagt, es sei $a = b$, wenn jedes a ein b ist und jedes b ein a." In dieser Definition befindet sich auf der einen Seite das Zeichen $=$ zwischen Klassen und soll definiert werden; auf der anderen tritt das Zeichen nicht auf. Die beiden Seiten sind durch das Zeichen $=$ verbunden,

1) Statt $\overline{x\varepsilon}p_x$ kann man des bequemeren Druckens wegen auch $x \ni p_x$ schreiben.

dieses hat man sich aber mit dem Zeichen Def. so verbunden zu denken, dafs die beiden Zeichen $=$ Def. nur ein einziges vorstellen. So ist es nur ein scheinbarer Zirkelschlufs, wenn man das Zeichen $=$ durch die Benutzung desselben Zeichens definiert.

Die folgenden Sätze verdienen Beachtung:

$$\begin{aligned} a, b, c \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, aa &= a \\ ab &= ba \\ a(bc) &= (ab)c. \end{aligned}$$

Sie wurden in Worten schon von *Leibniz* (*Opera philosophica*, S. 98) aufgestellt und in Symbolen von *Boole*, 1854, S. 29, 31 wenigstens bis auf die Bedeutung der Buchstaben, die damals noch mittelst der gewöhnlichen Sprache erklärt werden mufste.

Beispiel:

$$(\mathrm{N} \times 2) \frown (\mathrm{N} \times 3) = (\mathrm{N} \times 6).$$

Das Zeichen Λ zwischen Klassen bedeutet die Klasse Null, d. h. diejenige, welche kein Individuum enthält. Man kann folgendermafsen definieren:

6) $$a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ} \therefore a = \Lambda \,.\, = : b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ}_b \,.\, a \mathrm{Ɔ} b. \qquad \text{Def.}$$

„a sei eine Klasse. Man sagt, die Klasse a sei Null, wenn für jede beliebige Klasse b, a in b enthalten ist."

Der Satz $b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ}_b \,.\, a \mathrm{Ɔ} b$ enthält den scheinbaren Buchstaben b und ist daher eine Bedingung nur für a; wir können deshalb vereinbaren, sie mit der Schreibweise $a = \Lambda$ zu bezeichnen, worin nur der Buchstabe a auftritt.

Man beachte, dafs nur der Satz $a = \Lambda$ definiert worden ist, dafs man daher für den Augenblick noch den Komplex von Zeichen $= \Lambda$ als ein einziges Zeichen betrachten mufs. Diese Bezeichnungsart ist jedoch von Vorteil, weil die Bedingung $a = \Lambda$ sich wie eine Gleichheit verhält; d. h. man kann die Sätze beweisen:

$$\begin{aligned} a, b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, a = \Lambda \,.\, b = \Lambda \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, a = b, \\ \text{„} \quad .\, a = b \;.\, b = \Lambda \,.\, \mathrm{Ɔ} \,.\, a = \Lambda. \end{aligned}$$

Das Zeichen Λ ist aber bis jetzt noch nicht definiert, d. h. man kann noch keine Gleichheit bilden, deren eine Seite Λ ist und deren andere eine Gruppe bekannter Bezeichnungen bildet.

Analog dem Zeichen Λ kann man auch das Zeichen V (Alles) einführen:

$$a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ} \therefore a = \mathrm{V} \,.\, = : b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \mathrm{Ɔ}_b \, b \mathrm{Ɔ} a.$$

Das Zeichen V hat jedoch keinen praktischen Nutzen und kommt im Formular überhaupt nicht vor.

Beispiel:

$$\mathrm{N}^3 \frown (\mathrm{N}^3 + \mathrm{N}^3) = \Lambda.$$

„Kubikzahlen, welche zugleich die Summe zweier Kubikzahlen sind, existieren nicht.“ Will man diesen Satz durch die Grundbegriffe allein ausdrücken, ohne die Definitionen zu gebrauchen, so lautet er:

$$x\varepsilon\mathrm{N}^3 . x\varepsilon\mathrm{N}^3 + \mathrm{N}^3 \{ . a\varepsilon\mathrm{K} . \supset . x\varepsilon a.$$

a und b seien Klassen; $a \smile b$ bezeichnet die kleinste Klasse, die a und b enthält. Das Zeichen $\smile$ wird „oder“ gelesen; die durch dieses Zeichen angegebene Operation heifst logische Addition.

Es läfst sich durch die früheren Symbole auf die folgende Art definieren:

8) $$a, b\varepsilon\mathrm{K} . \supset . a \smile b = \overline{x\varepsilon}(c\varepsilon\mathrm{K} . a \supset c . b \supset c . \supset_c . x\varepsilon c). \qquad \text{Def.}$$

„Wenn a und b die angegebene Bedeutung haben, so bezeichnet $a \smile b$ die Gesamtheit der Individuen, die jeder Klasse c angehören, welche die beiden Klassen a und b enthält.“

Man hat:

$$a, b, c\varepsilon\mathrm{K} . a \supset c . b \supset c . \supset . a \smile b \supset c \quad (\textit{Leibniz}, \text{ S. } 96)$$

$$\text{„ „ } . \supset . a(b \smile c) = ab \smile ac.$$

Diese Formel drückt die distributive Eigenschaft der logischen Multiplikation in Bezug auf die Addition aus; die Eigenschaft wurde von *Lambert*, 1781 erkannt.

Beispiel:

$$\mathrm{Np} \frown (3 + \mathrm{N}) \supset (6\mathrm{N} - 1) \smile (6\mathrm{N} + 1).$$

Dieser Satz läfst sich ohne Benutzung der Def. 8) auf folgende Art darstellen:

$$x\varepsilon\mathrm{Np} . x > 3 . a\varepsilon\mathrm{K} . 6\mathrm{N} - 1 \supset a . 6\mathrm{N} + 1 \supset a . \supset . x\varepsilon a.$$

Wenn a eine Klasse ist, so versteht man unter $\sim a$ die Klasse der nicht a, die sich, wie folgt, definieren läfst:

9) $$a\varepsilon\mathrm{K} . \supset . \sim a = \overline{x\varepsilon}(b\varepsilon\mathrm{K} . a \smile b = \mathrm{V} . \supset_b . x\varepsilon b) \qquad \text{Def.}$$

„Unter $\sim a$ verstehen wir die Gesamtheit der x, welche jeder Klasse b angehören, die mit a zusammen als Summe das Ganze ergiebt.“

Die Negation wird so mittelst der Zeichen $\smile$ und V ausgedrückt. Von den vielen Identitäten, die es giebt, erwähnen wir die beiden:

$$a, b\varepsilon\mathrm{K} . \supset . \sim(a \smile b) = (\sim a) \frown (\sim b)$$

$$\sim(a \frown b) = (\sim a) \smile (\sim b),$$

welche *De Morgan*, 1858 (mit Ausschlufs der Bedeutung der Buchstaben) in Symbolen ausgedrückt hat.

Aus der ersten ergiebt sich

$$a, b \varepsilon \mathrm{K} . \supset . a \cup b = \sim [(\sim a) \cap (\sim b)],$$

welche man als Definition des Zeichens $\cup$ durch die Zeichen $\sim$ und $\cap$ benutzen könnte; so war es in der That in dem Formular geschehen; die jetzt getroffene Wahl führt aber zu einer weiteren Reduktion.

Die Zeichen $\supset$ und $\cap$ können sich zwischen Sätzen befinden oder zwischen Klassen; die Bedeutung des zweiten wurde aus der des ersten mittelst der Definitionen 2 und 4 abgeleitet. Die Zeichen $=$, Λ, $\cup$, $\sim$, die nur für Klassen definiert sind, erscheinen auch zwischen Sätzen und werden dann, wie folgt, erklärt:

10) $a, b \varepsilon \mathrm{K} . \supset .\because x \varepsilon a . =_x . x \varepsilon b : = : x \varepsilon a . \supset_x x \varepsilon b : x \varepsilon b . \supset_x x \varepsilon a$ Def.

oder auch

„ „ „ $= . a = b.$

„Wir sagen, zwei Bedingungssätze für x nämlich $x \varepsilon a$ und $x \varepsilon b$ seien in Bezug auf x äquivalent, wenn aus dem ersten der zweite folgt und umgekehrt, oder, was dasselbe bedeutet, wenn die Klassen a und b gleich sind."

Die Zeichen $\supset$ und $=$ haben eine andere Stellung, die häufig vorkommt, und die wir, wie folgt, definieren:

11) $a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . \supset :: x \varepsilon a . \supset_x : x \varepsilon b . \supset . x \varepsilon c .\because . = : x \varepsilon a . x \varepsilon b . \supset_x . x \varepsilon c$

oder auch

„ „ „ „ $= ab \supset c$ Def.

„Wenn a, b, c Klassen sind, so sagen wir, aus $x \varepsilon a$ folge in Bezug auf x, dafs $x \varepsilon b$ aus $x \varepsilon c$ folgt, wenn aus $x \varepsilon a$ und aus $x \varepsilon b$ sich $x \varepsilon c$ ergiebt, das heifst, wenn die Klasse ab in c enthalten ist."

12) $a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . \supset :: x \varepsilon a . \supset_x : x \varepsilon b . = . x \varepsilon c .\because . = . ab \supset c . ac \supset b$ Def.

„Wir sagen ferner, wenn $x \varepsilon a$ besteht, sei die Bedingung $x \varepsilon b$ äquivalent der Bedingung $x \varepsilon c$, falls bei der Hypothese $x \varepsilon a$ sich aus $x \varepsilon b$ ergiebt $x \varepsilon c$ und umgekehrt, das heifst, wenn $ab \supset c$ und $ac \supset b$."

13) $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset .\because x \varepsilon a . =_x \Lambda . = . a = \Lambda$ Def.

„a sei eine Klasse; wir sagen, der Satz $x \varepsilon a$ sei in Bezug auf die Variabele x absurd, und schreiben dies, wie in der Formel, wenn die Klasse a Null ist."

14) $a, b \varepsilon \mathrm{K} . \supset : x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b . = . x \varepsilon a \cup b$ Def.

„Wir schreiben $x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b$ und lesen dies x ist ein a oder x ist ein b statt x ist ein a oder b."

15) $$a \varepsilon \mathrm{K} . \supset : \sim(x \varepsilon a) . = . x \varepsilon \sim a.$$ Def.

Hier wird die Negation eines Satzes durch die Negation einer Klasse ausgedrückt.

Bei den vorstehenden Definitionen ist die linke Seite komplizierter als die rechte, weil die Sätze, an denen wir operieren, in der Form $x \varepsilon a$ ausgedrückt sind.

Zur Vermeidung von Klammern setzt man das Zeichen $\sim$ häufig vor das Beziehungszeichen, wie z. B.

16) $$a \varepsilon \mathrm{K} . \supset : x \sim \varepsilon a . = . \sim(x \varepsilon a)$$ Def.

17) $$x \sim = y . = . \sim(x = y)$$ Def.

Um einigen der aufgeführten Definitionen die allgemeine Geltung geben zu können, die wir in unseren Formeln nötig haben, müssen wir den Begriff des Paares einführen.

$(x; y)$ bezeichnet das Paar, das von den Dingen x und y gebildet wird.

Dieses Paar wird als ein neues Ding betrachtet. In dem Formular ist statt $(x; y)$ einfach (x, y) geschrieben worden, da in der Anwendung die Gefahr einer Verwechselung mit der Definition 1[a] nicht besteht.

Der Begriff des Paares ist ein Grundbegriff, das heißt, wir sind nicht im stande, ihn durch die früheren Symbole auszudrücken. Jedoch können wir die Gleichheit zweier Paare definieren:

18) $$(x; y) = (a; b) . = . x = a . y = b$$ Def.

„Das Paar $(x; y)$ heißt dem Paar $(a; b)$ gleich, wenn ihre Elemente der Ordnung nach gleich sind.“

Mit Hülfe des Begriffs des Paares können wir einige wichtige Regeln für Schlußfolgerungen, die wir in früheren Arbeiten in gewöhnlicher Sprache erklärt hatten, jetzt vollständig in Symbolen ausdrücken, wie z. B.

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{K} : x \varepsilon a . (x; y) \varepsilon b . \supset_{x,y} . (x; y) \varepsilon c : \supset .\dot{}. x \varepsilon a . \supset_x : (x; y) \varepsilon b . \supset_y . (x; y) \varepsilon c.$$

„a, b, c seien Klassen. Wir nehmen an, für jedes beliebige x und y gehöre, wenn x der Klasse a angehört, und das Paar $(x; y)$ der Klasse b, das letztere Paar der Klasse c an. Alsdann folgt, daß für jedes beliebige x, wenn es nur ein a ist, und für jedes beliebige y, wenn nur das Paar $(x; y)$ der Bedingung b genügt, das Paar $(x; y)$ die Bedingung c erfüllt.“

Diese Regel für Schlußfolgerungen heißt „die Hypothesen separieren“. Auch der umgekehrte Satz ist gültig.

Beispiel:

$$a \varepsilon \mathrm{N} . b \varepsilon \mathrm{N} \times a . c \varepsilon \mathrm{N} \times b . \supset . c \varepsilon \mathrm{N} \times a.$$

Hier mufs man sich an dem Zeichen $\supset$ die Indices a, b, c hinzudenken. Separiert man die Hypothesen in Bezug auf a und b, so erhält man

$$a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\, \supset : c \varepsilon \mathrm{N} \times b \,.\, \supset_c .\, c \varepsilon \mathrm{N} \times a.$$

Bei dem ersten der Zeichen $\supset$ hat man die Indices a und b zu ergänzen; das zweite trägt den Index c. Nach. Def. 2 kann man auch schreiben:

$$a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\, \supset .\, \mathrm{N} \times b \supset \mathrm{N} \times a.$$

Das Tripel oder die Terne $(x; y; z)$ kann man als ein aus $(x; y)$ und z gebildetes Paar ansehen.

Die Definitionen 10)—15) drücken Operationen an Sätzen von der Form $x \varepsilon a$ aus, die nur einen veränderlichen Buchstaben x enthalten. Wir können aber annehmen x stelle ein Paar, eine Terne, d. h. irgend ein System von Buchstaben dar; nimmt man daher den Begriff des Paares hinzu, so drücken diese Definitionen Operationen an beliebigen Bedingungssätzen aus.

Der Satz $a \sim = \Lambda$, worin a eine Klasse ist, heifst also „die a existieren". Da nun diese Beziehung sehr häufig vorkommt, so halten es verschiedene Mitarbeiter für empfehlenswert, sie durch ein einziges Zeichen auszudrücken, statt die ganze Gruppe $\sim = \Lambda$ zu verwenden. Wer der Ansicht ist, könnte z. B. setzen

19) $$a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset : \exists a \,.\, = .\, a \sim = \Lambda$$ Def.

Beispiel:

$$\exists\, \mathrm{N}^2 \frown (\mathrm{N}^2 \dotplus \mathrm{N}^2).$$

„Es existieren Quadrate, welche die Summe von Quadraten sind."

Das Zeichen $=$ ist für den Fall schon definiert worden, wenn es zwischen zwei Klassen, zwei Sätzen, zwei Paaren steht; in der Mathematik wird es immer von neuem definiert, wenn es sich zwischen neu eingeführten Dingen befindet.

Man kann die allgemeine Definition geben:

20) $$x = y \,.\, = : a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, x \varepsilon a \,.\, \supset_a .\, y = a.$$ Def.

„Wir sagen, das Ding x sei dem Ding y gleich, wenn jede Klasse a, welche x enthält, auch y enthält."

Wir müssen jedoch noch zeigen, wie die verschiedenen speziellen Definitionen in diese eine sich einfügen.

Ist x irgend ein beliebiges Ding, so versteht man unter ιx die Klasse, welche aus diesem einen Ding allein gebildet ist:

21) $$\iota x = \overline{y \varepsilon}\, (y = x)$$ Def.

„Unter ιx versteht man die Gesamtheit der y, welche der Bedingung $y = x$ genügen."

Man hat die Gleichheiten

$$a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset .\, x \varepsilon a \quad .=.\, \iota x \supset a$$
$$„ \qquad x \varepsilon \sim a \,.=.\, \iota x \frown a = \Lambda$$
$$„ \qquad x, y \varepsilon a \,.=.\, \iota x \smile \iota y \supset a,$$

welche die Sätze $x \varepsilon a$ und $x \varepsilon \sim a$ durch andere ausdrücken, in denen die Zeichen ε, $\sim$ nicht vorkommen.

Umgekehrt sei a eine Klasse, welche nur ein Individuum enthält, d. h., es mögen solche a existieren, dafs zwei Individuen x und y von a, wie man sie auch nehmen möge, stets gleich seien. Alsdann bezeichnen wir dieses Individuum mit $\bar{\iota} a$ oder ιa. Man hat daher

22) $a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \exists a : x, y \varepsilon a \,.\, \supset_{x y} .\, x = y : \supset : x = \bar{\iota} a \,.=.\, a = \iota x$ Def.

Diese Definition giebt in Wirklichkeit die Bedeutung der ganzen Formel $x = \bar{\iota} a$ und nicht der Gruppe $\bar{\iota} a$ allein. Jeder Satz aber, der $\bar{\iota} a$ enthält, läfst sich auf die Form $\bar{\iota} a \varepsilon b$, worin b eine Klasse ist, reduzieren und diese Form auf $a \supset b$, worin das Zeichen $\bar{\iota}$ verschwunden ist, wenn es auch nicht gelingt eine Gleichheit zu bilden, deren eine Seite $\bar{\iota} a$ und deren andere eine Gruppe bekannter Zeichen ist.

Beispiel:

$$a, b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, a < b \,.\, \supset .\, b - a = \bar{\iota} \mathrm{N} \frown \overline{x \varepsilon} \, (a + x = b).$$

„Wenn a und b Zahlen sind, und $a < b$ ist, so bezeichnet $b - a$ die ganze Zahl, die zu a hinzugefügt b ergiebt."

Die Def. 6 giebt die Bedeutung des ganzen Symbols $= \Lambda$; das Symbol Λ allein läfst sich definieren:

$$\Lambda = \bar{\iota} \mathrm{K} \frown \overline{a \varepsilon} \, (b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset_b .\, a \supset b)$$

oder auch

$$\Lambda = \bar{\iota} \overline{x \varepsilon} \, (a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset_a a \sim a = x).$$

„Null ist der allgemeine Wert des Ausdrucks $a \sim a$, welche Klasse a auch sein mag."

Man hat auch

$$a \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset .\, \sim a = \bar{\iota} \mathrm{K} \frown \overline{x \varepsilon} \, [a \frown x = \Lambda \,.\, a \smile x = \mathrm{V}].$$

„Wenn a eine Klasse ist, so giebt $\sim a$ diejenige Klasse x an, welche mit a multipliziert Null und zu a addiert das Ganze giebt."

Diese Definition der Negation von a drückt *Schröder*, *Algebra der Logik*, 1891, S. 32 zum Teil in Symbolen zum Teil in Worten aus.

Wir wollen noch die Ausdrücke Korrespondenz oder Funktion f und $\mathfrak{J}$ definieren.

23) $a, b \varepsilon \mathrm{K} \,.\, \supset \therefore u \varepsilon b \mathrm{f} a \,.=: x \varepsilon a \,.\, \supset_x .\, u x \varepsilon b.$

23') $„ \quad .\, \supset \therefore u \varepsilon a \mathfrak{J} b \,.=: x \varepsilon a \,.\, \supset_x .\, x u \varepsilon b.$

„Wenn a und b Klassen sind, so sagen wir u sei ein $b\mathrm{f}a$ oder ein $a\reflectbox{$\mathrm{f}$}b$, wenn man dadurch, daſs man das Zeichen u vor oder hinter ein beliebiges Individuum der Klasse a setzt, b erhält.“

Die Korrespondenz der Ähnlichkeit läſst sich definieren:

$$24)\quad a,b\varepsilon \mathrm{K}.\supset.\because.f\varepsilon(b\mathrm{f}a)\,\mathrm{sim}.=:f\varepsilon b\mathrm{f}a:x,y\varepsilon a.x\sim=y.\supset_{xy}.fx\sim=fy.$$

Die reziproke Korrespondenz:

$$25)\quad a,b\varepsilon \mathrm{K}.\supset.\because.f\varepsilon(b\mathrm{f}a)\,\mathrm{rcp}.=:f\varepsilon(b\mathrm{f}a)\,\mathrm{sim}:y\varepsilon b\supset_y.\exists\,\overline{x\varepsilon}(x\varepsilon a.fx=y)$$

und schlieſslich die Zahl:

$$26)\qquad a,\,b\varepsilon \mathrm{K}\,.\supset:\mathrm{Num}\,a=\mathrm{Num}\,b\,.=.\,\exists\,(b\mathrm{f}a)\,\mathrm{rcp}.$$

„Wir sagen die Zahl der a sei der Zahl der b gleich, wenn eine reziproke Korrespondenz zwischen den a und b existiert.“

Aus diesem Allem folgt nun:

Kommt man über gewisse Symbole überein, die durch die gewöhnliche Sprache erklärt werden und Begriffe darstellen, die wir primitive oder Grundbegriffe nennen, so läſst sich, wie wir es gethan haben, die symbolische Definition aller Zeichen geben, die in der mathematischen Logik vorkommen.

Wir sind aber der Ansicht, daſs auf diesem Gebiet noch viel zu thun ist. Man kann suchen, die Anzahl der für primitiv gehaltenen Begriffe weiter zu reducieren oder kann andere Wege einschlagen, indem man zu Grundbegriffen eine andere Gruppe von Begriffen nimmt und auf diese Weise irgend einer Vereinfachung erstrebt.

Die zahlreichen Gleichheiten der Logik, die man kennt und die man noch finden kann, gestatten bei dem Klassificieren der Symbole der Logik verschiedene Richtungen zu verfolgen.

Es würde nun die Klassifikation der Sätze der Logik in primitive und abgeleitete ein längeres Studium erfordern. Wir begnügen uns jedoch hier damit, die Aufmerksamkeit auf diese im höchsten Grad wertvollen und interessanten Studien gelenkt zu haben.

Anhang II.

Definitionen der Arithmetik.

(Auszug aus dem Formulaire de Mathématiques, Bd. 2, § 2.)

Grundbegriffe.

1) $0 =$ „Null."
2) $N_0 =$ „eine ganze, positive Zahl oder Null."
3) $a \varepsilon N_0 . \supset . a + =$ „die auf a folgende Zahl."

Grundsätze.

1) $0 \varepsilon N_0$.
2) $a \varepsilon N_0 . \supset . (a +) \varepsilon N_0$.
3) $a, b \varepsilon N_0 . (a +) = (b +) . \supset . a = b$.
4) $a \varepsilon N_0 . \supset . (a +) \sim= 0$.
5) $s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : x \varepsilon s . \supset_x . (x +) \varepsilon s : \supset . N_0 \supset s$.

Die drei ersten Nummern drücken durch die gewöhnliche Sprache die Bedeutung der Symbole N_0, $+$, 0 aus.

Die durch diese Symbole dargestellten Grundbegriffe werden durch fünf Grundsätze bestimmt, aus welchen sich alle Sätze der Arithmetik ergeben.

Wir wollen das Zeichen N_0 „Zahl" lesen, obwohl dieses Wort verschiedene Bedeutungen hat.

Das Zeichen N_0 stellt, obwohl es mit zwei Zeichen gedruckt ist, einen einfachen Begriff dar. Die Zahlen, die mit 1 beginnen, bezeichnen wir mit N_1.

Nach der Schule des Pythagoras ist die erste Zahl 2. Das Wort „Ἀριθμός" des Euclid ist daher mit $N_0 + 2$ zu übersetzen.

Das Zeichen $+$ stellt vorerst den einfachen Begriff des „Folgenden" dar. Später soll es die Summe bezeichnen, wie es der gewöhnliche Gebrauch ist.

Bei dem Lesen der Sätze empfiehlt es sich, möglichst sich der gewöhnlichen Sprache zu nähern. Man wird z. B. die Grundsätze (Pp)[1] lesen:

---

1) Pp Abkürzung für Proposizioni primitive.

(P1) „0 ist eine Zahl."

(P2) „Es sei a eine Zahl; die darauf folgende ist auch eine bestimmte Zahl."

(P3) „Wenn auf zwei Zahlen a und b dieselbe Zahl folgt, so sind sie gleich."

(P4) „Die Zahl, welche auf eine beliebige Zahl folgt, ist niemals 0."

(P5) „s sei eine Klasse: wir wollen annehmen, 0 gehöre dieser Klasse an, und jedesmal, wenn ein Individuum x dieser Klasse angehört, gehöre auch das ihm folgende ihr an; alsdann gehören alle Zahlen dieser Klasse an." Diese Pp heifst Inductionsprinzip. Man kann sie auch lesen: „Wenn ein Satz für die Zahl 0 gilt und wenn er, für die Zahl x geltend, auch für die Zahl $(x+)$ seine Gültigkeit behält, so gilt er allgemein."

Definition der Ziffern.

$$1 = 0 + .\, 2 = 1 + .\, 3 = 2 + .\, 4 = 3 + .\, 5 = 4 + .$$

$$6 = 5 + .\, 7 = 6 + .\, 8 = 7 + .\, 9 = 8 + .\, \mathrm{X} = 9 + .$$

Wir haben zu den Ziffern 0, 1 ... 9 das Zeichen X der Römer hinzugefügt, um die Zahl „zehn" anzugeben; wir haben es so lange nötig, bis wir Vereinbarungen über das Zählen getroffen haben, welche notwendiger Weise erst der Multiplikation und dem Erheben auf eine Potenz folgen können.

Definition der Summe zweier N_0

$$a, b \varepsilon N_0 \,.\, \Omega.$$

1) $a + 0 = a$.

2) $a + (b+) = (a + b) +$.

Diese P geben durch Induction die Definition der Summe $a + b$.

„$a + 0$ bedeutet a und wenn man die Bedeutung von $a + b$ für einen gewissen Werth von b kennt, so versteht man unter $a + (b+)$ die auf $a + b$ folgende Zahl."

Wenn man in 2), $b = 0$ setzt, so erhält man zuerst die Bedeutung von $a + 1$; setzt man $b = 1$, so ergiebt sich der Wert von $a + 2$, etc.

Verallgemeinerung.

$$s \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \varepsilon s \mathfrak{f} \dot{s} \,.\, a \varepsilon s \,.\, b \varepsilon N_0 \,.\, \Omega.$$

1) $au0 = a$.

2) $au(b+) = (aub)u$.

(P1) „s sei eine Klasse; u eine Transformation der s in s; a sei ein s und b eine Zahl. Alsdann bedeutet $au0$ soviel wie a."

(P 2) „unter $au(b+)$ verstehen wir das, was man erhält, wenn man an aub noch einmal mit dem Zeichen u operiert."

Setzt man in P 2, $b = 0$, so erhält man $au1 = au$; setzt man $b = 1$, so wird $au2 = (au)u$, $au3 = auuu$, u. s. w. Daraus folgt durch Induktion die Bedeutung von aub für jede beliebige Zahl b. Nimmt man z. B. als Klasse s die N_0 und als Operation u die Operation $+$ (das folgende), so erhält man, wie zuvor

$$a + 0 = a,\ a + 1 = a +,\ a + 2 = a + +, \ldots$$

Die Formel aub mufs, wenn es nötig ist, in $a(ub)$ zerlegt werden. Wenn daher u eine bestimmte Operation in der Klasse s ist, so ergiebt sich für jede beliebige Zahl b die neue Operation ub, welche man „die $b$mal wiederholte Operation u" nennt.

Definition von N_1 (einer Zahl, die gröfser als 0 ist):

$$N_1 = N_0 + .$$

Statt N_1, einer auf irgend ein N_0 folgenden Zahl, findet man in manchen Arbeiten N geschrieben.

Definition der Differenz:

$$a \varepsilon N_0 . b \varepsilon a + N_0 . \supset .$$
$$b - a = \iota [N_0 \cap x \ni (x + a = b)].$$

„Es sei a eine Zahl und b eine Zahl gröfser als a oder gleich a. Man bezeichnet mit $b - a$ die Zahl x, welche der Gleichung $x + a = b$ genügt."

Daraus läfst sich ableiten

$$+ a \varepsilon N_0 \text{ɟ} N_0 .$$
$$- a \varepsilon (a + N_0) \text{ɟ} N_0 .$$

„Es sei a eine Zahl, alsdann ist $-a$ eine Operation, welche an einer Zahl ausgeführt, die nicht kleiner als a ist, eine Zahl erzeugt."

Man kann sie mit der vorhergehenden Formel vergleichen, welche aussagt, dafs $+a$, d. h. die Operation $+$, $a$mal wiederholt, ein $N_0 \text{ɟ} N_0$ ist.

Die Zeichen $+N_0$ und $-N_0$ entsprechen etwa den Worten „positive Zahl" und „negative Zahl"; sie stellen sich als Operationen ɟ dar. Das Zeichen $+a$ ist gleichwertig mit dem Ausdruck „a hinzufügen" und $-a$ bedeutet „a wegnehmen".

Definition von n (einer ganzen positiven oder negativen Zahl):

$$\mathrm{n} = + N_0 \cup - N_0 .$$

Definition der Gleichheit zweier n:

$$x, y \varepsilon \mathrm{n} . \supset .\because$$
$$x = y . = : u \varepsilon N_0 . u + x, u + y \varepsilon N_0 . \supset_u . u + x = u + y.$$

„Zwei ganze Zahlen x und y sind nach der Definition gleich, wenn für jede positive Zahl u, $u + x = u + y$ ist, vorausgesetzt, daſs diese Operationen in natürlichen Zahlen möglich sind."

Definition der Summe zweier n:

$$x, y \varepsilon \mathrm{n} . \supset .\cdot. x + y =$$
$$= \iota \mathrm{n} \frown z \ni [u \varepsilon \mathrm{N}_0 . u + x, u + x + y \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset_u . u + x + y = u + z].$$

Koincidenz von n und N_0:

$$a \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a = + a.$$

Diese Definition besagt, daſs wir dem gewöhnlichen Gebrauch entsprechend die Vereinbarung treffen, mit demselben Zeichen die beiden verschiedenen Dinge a und $+ a$ darzustellen. Man braucht offenbar diese Koincidenz nicht anzunehmen.

Definition des Produkts zweier N_0:

$$a, b \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a \times b = 0 [(+ a) b].$$

„a und b seien Zahlen; unter $a \times b$ oder ab versteht man dasjenige, was sich ergiebt, wenn an 0 die Operation $+ a$, $b$mal ausgeführt wird."

Definition des Produkts zweier n:

$$a \varepsilon \mathrm{n} . b \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a \times b = 0 [(+ a) b].$$
$$\text{„} \quad \text{„} \quad . \supset . a \times (- b) = 0 [(- a) b].$$

Definition des Verhältnisses zweier N_1:

$$a \varepsilon \mathrm{N}_1 . b \varepsilon \mathrm{N}_1 \times a . \supset . b/a = \iota \mathrm{N}_1 \frown x \ni (x \times a = b).$$

„Es sei a eine Zahl, die nicht Null ist, und b ein Vielfaches von a; „b dividiert durch a" bezeichnet die Zahl x, welche der Bedingung $x \times a = b$ genügt."

Daraus folgt

$$/a \varepsilon (a \times \mathrm{N}_1) \mathfrak{f} \mathrm{N}_1 .$$

$/a$, welches „durch a dividieren" gelesen wird, bezeichnet mithin eine bestimmte Operation an den Vielfachen von a; das Resultat ist ein N_1.

Definition von R (der rationalen, positiven Zahl):

$$\mathrm{R} = x \ni \exists (a, b) \ni [a, b \varepsilon \mathrm{N}_1 . x = (\times b) (/a)]$$

oder auch

$$\mathrm{R} = \mathrm{N}_1/\mathrm{N}_1.$$

„Man nennt „Verhältnis" jeden Ausdruck von der Form $(\times b) (/a)$, in welchem a und b ganze positive Zahlen sind."

Die rationale Zahl oder das Verhältnis, der λόγος ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἔχει des Euclid, stellt sich hier als eine in gewissen

Fällen mögliche Operation dar; wir haben diese Zahl auf dieselbe Art gefunden, wie die positiven und negativen Zahlen.

Definition der Gleichheit, der Summe, des Produkts zweier R und des reciproken Wertes eines R:

$x, y \varepsilon \mathrm{R} . \supset .\cdot.$

$1 . \ x = y . = : u \varepsilon \mathrm{N}_1 . ux, uy \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset_u . ux = uy$ Def.

$2 . \ x + y = \iota \mathrm{R} \cap z \ni (u \varepsilon \mathrm{N}_1 . ux, uy \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset_u . ux + uy = uz)$ Def.

$3 . \ xy = \iota \mathrm{R} \cap z \ni (u \varepsilon \mathrm{N}_1 . ux, uxy \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset_u . uxy = uz)$ Def.

$4 . \ /x = \iota \mathrm{R} \cap y \ni (x \times y = 1).$ Def.

1. „Zwei rationale Zahlen x und y heifsen gleich, wenn für jede beliebige Zahl u, die aber derart ist, dafs die Operationen ux und uy möglich sind, die Resultate dieser Operationen gleich sind."

3. „Das Produkt xy zweier rationalen Zahlen ist die rationale Zahl z, welche der Bedingung $uxy = uz$ genügt, die ganze Zahl u mag sein, welche sie will, wenn nur die Operationen uz und uxy möglich sind."

Die Schreibweise a/b, die namentlich bei den Engländern verbreitet ist, ist eine für den Druck bequeme Abänderung der gewöhnlichen Bezeichnung $\frac{a}{b}$, welche von den Hindus stammt.

$/a$ bedeutet „durch a dividieren" oder „mit dem reciproken Wert von a multiplizieren" oder auch, wenn man das Multiplikationszeichen weglässt „der reciproke Wert von a". Dieses Symbol entspricht dem Symbol $-a$, welches „a wegnehmen", das Entgegengesetzte von a hinzufügen", „die negative Zahl $-a$" bedeutet

Definition von r (der rationalen Zahl):

$$\mathrm{r} = +\mathrm{R} \cup -\mathrm{R} \cup . 0, \text{ oder } \mathrm{r} = \mathrm{n}/\mathrm{N}.$$

Definition der Potenz:

$$a \varepsilon \mathrm{r} . m \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a^m = 1 \, [(\times a) m].$$

„a in der m^{ten} heifst, die Einheit $m$mal mit a multiplizieren."

Definition der Gleichheit der oberen Grenzen der Klassen rationaler Zahlen:

$$u, v \varepsilon \operatorname{Cls} \mathrm{r} . a \varepsilon \mathrm{r} . \supset .$$

1. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v . = . u - \mathrm{R} = v - \mathrm{R}.$

2. $a < \mathrm{l}'u . = . a \varepsilon u - \mathrm{R}.$

1. Wir sagen, die obere Grenze der Zahlen der Klasse u sei der oberen Grenze der v gleich, wenn jede Zahl, welche kleiner

als irgend ein u ist, auch kleiner als irgend ein v ist und umgekehrt.

2. Wir sagen ferner, die rationale Zahl a sei kleiner, als die obere Grenze der u, wenn sie kleiner als irgend ein u ist.

3. $\mathrm{l}'u = \infty \,.=\, u - \mathrm{R} = \mathrm{r}$.

Definition von q (der reellen Zahl):

$$\mathrm{q} = x \ni \exists u \ni [u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{r} \,.\, \exists u \,.\, \exists \mathrm{R} - (u - \mathrm{R}) \,.\, x = \mathrm{l}'u].$$

„Eine reelle Zahl ist jede obere Grenze der Klassen der rationalen wirklich existierenden Zahlen, die nicht zur oberen Grenze ∞ haben.“

Setzt man in dieser Definition R an die Stelle von r, so erhält man die Definition von Q (reelle positive Zahl).

Definition der Summe zweier q:

$a +, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset .$

$a, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset .$

$$a + b = \mathrm{l}'z \ni \exists (x, y) \ni [x, y \varepsilon \mathrm{r} \,.\, x < a \,.\, y < b \,..\, x + y = z].$$

„Die Summe zweier reellen Zahlen a und b ist die obere Grenze der Summen x und y, worin die rationale Zahl x kleiner als a und die rationale Zahl y kleiner als b ist.“

Koincidenz einer rationalen und einer reellen Zahl:

$$a \varepsilon \mathrm{r} \,.\supset .\, a = \mathrm{l}'(\iota a).$$

Anhang III

(zu Nr. 193).

Über die Taylor'sche Formel.

(Aus den Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino Bd. 27, 1891).

Die Taylor'sche Formel, welche man als die Grundlage der Infinitesimalrechnung ansehen kann, wurde bis nach *Lagrange* in der Gestalt

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \text{ etc.}$$

geschrieben, ohne dafs man sich weiter um die genaue Bedeutung dieser Gleichheit kümmerte.

Nachdem man aber in diesem Jahrhundert genau zwischen konvergenten und divergenten Reihen unterschieden hat, wird sie jetzt nur dann für gültig gehalten, wenn die Reihe auf der rechten Seite konvergiert und zur Summe die linke Seite hat. Weil aber diese Reihe sowohl für einige wie auch für alle Werte von h divergieren kann, oder auch konvergieren kann ohne die linke Seite zur Summe zu haben, so folgt daraus, dafs die Formel jeden theoretischen Wert verliert und jedesmal, wenn sie angewendet werden soll, auf ihre Gültigkeit geprüft werden mufs.

Man kann sie aber auch auf andere Weise unabhängig von der Konvergenz der Reihen auslegen und alsdann behält sie ihre Gültigkeit, welche Funktion $f(x)$ auch sein mag, wenn diese letztere nur die Derivierten hat, die man benutzen will. Diese neue Interpretation soll hier besprochen werden. Wir sagen „neu", weil sie in keinem Buch, so viel wir wenigstens wissen, klar formuliert worden ist; doch kommt sie dem aufserordentlich nahe, was alle Autoren, welche die Reihen ohne Berücksichtigung der Konvergenz untersuchten, darüber geschrieben haben; ja an gewissen Punkten werden wir ihre Sätze einfach nur wiederholen, indem wir ihre Gültigkeit nachweisen.

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion der reellen Variabelen x. Man nehme an, wenn x der Null zustrebe, so nähere sich $f(x)$ einer Grenze a_0. Ist $f(x)$ kontinuierlich, so ist $a_0 = f(0)$. Alsdann wird $f(x) - a_0$ mit x eine unendlich kleine Gröfse; man dividiere sie durch x und gehe zur Grenze über, indem man x sich der Null nähern läfst. Man nehme an, diese Grenze sei bestimmt und nenne sie a_1:

$$\lim \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1.$$

Ebenso wird die Differenz $\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1$ mit x unendlich klein; wir wollen sie durch x dividieren und zur Grenze übergehen; es sei

$$\lim \frac{\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1}{x} = \lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = a_2$$

und analog

$$\lim \frac{\frac{\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1}{x} - a_2}{x} = \lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^3} = a_3$$

und so weiter.

Auf diese Art leiten wir, wenn die Funktion $f(x)$ gegeben ist, eine Reihenfolge reeller Gröfsen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ab, welche unbegrenzt, wie in den gewöhnlicheren Fällen, fortgesetzt werden kann oder auch zu Ende gehen kann, wenn einer dieser Quotienten keine bestimmte endliche Grenze mehr hat.

Wir wollen übereinkommen, zu schreiben:

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \text{etc.},$$

um zu bezeichnen, dafs

$$(2)\qquad \lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} = a_n$$

ist.

Die Bedeutung des Zeichens $=$ in (1) ist daher im allgemeinen nicht die, dafs die Reihe auf der rechten Seite konvergent sei und zur Summe $f(x)$ habe, sondern wird durch die Formel (2) angegeben. Diese Formel kann auch in der Gestalt

$$(3)\qquad \lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n}{x^n} = 0,$$

$$(4)\quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \alpha x^n, \text{ worin } \lim_{x=0} \alpha = 0$$

ist, geschrieben werden und läfst sich so in Worte fassen: Die Gleichheit (1) giebt an, dafs die Differenz zwischen $f(x)$ und dem Polynom $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit x unendlich klein von einer höheren als der n^{ten} Ordnung wird.

Wenn sich $f(x)$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x bis dem Glied vom n^{ten} Grade nach der Formel (1) entwickeln läfst, oder, was dasselbe ist, wenn die bestimmten und endlichen Gröfsen $a_0\, a_1 \ldots a_n$ existieren, die der Bedingung (2) genügen, alsdann hat man, wie sich leicht ergiebt:

$$\lim f(x) = a_0,$$

$$\lim \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1,$$

$$\lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-2} x^{n-2}}{x^{n-1}} = a_{n-1},$$

d. h.: die Formel (2) hat alle diejenigen Formeln zur Folge, die sich aus ihr ableiten lassen, wenn man statt n irgend eine Zahl setzt, die kleiner als n ist.

Wir wollen nun einige Theoreme über Operationen an diesen Entwicklungen folgen lassen.

Theorem I. Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \text{etc.}$$

und

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \text{etc.}$$

ist, so wird

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + \cdots + (a_n + b_n)\, x^n + \text{etc.}$$

Denn, schreibt man $f(x)$ in der Gestalt

$$a_0 + \cdots + a_n x^n + \alpha x^n$$

und $\varphi(x)$ in der Form

$$b_0 + \cdots + b_n x^n + \beta x^n$$

und summiert, so wird

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n)\, x^n + \gamma x^n,$$

worin γ für $\alpha + \beta$ gesetzt wurde, und da α und β mit x unendlich klein werden, so wird auch γ mit x unendlich klein; d. h. also die Formel besteht, wie zu beweisen war.

Theorem II. Unter derselben Voraussetzung ist:

$$f(x) \times \varphi(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)\, x^n + \text{etc.}$$

Der Beweis ist analog.

Theorem III. Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \text{etc.}$$

und

$$\psi(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \text{etc.}$$

ist und man unter der Voraussetzung, dafs a_0 nicht Null sei, die Werte von $b_0 b_1 \ldots b_n$ aus den Gleichungen

$$a_0 b_0 = c_0,\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1, \cdots, a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = c_n$$

berechnet, so ist:

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \text{etc.}$$

Wenn sich der Ausdruck $f(x+h)$ nach Potenzen von h in dem definierten Sinn entwickeln läfst und man

$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \text{etc.}$$

erhält, so ist $a_0 = \lim_{h=0} f(x+h)$, mithin, wenn $f(x)$ für den betrachteten Wert von x kontinuierlich ist, $a_0 = f(x)$.

Unter derselben Voraussetzung ist $a_1 = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$; mithin hat $f(x)$ für den betrachteten Wert eine Derivierte und diese ist a_1.

Theorem IV. Wenn sich die Derivierte $f'(x+h)$ nach Potenzen von h bis zu dem Glied vom n^{ten} Grad entwickeln läfst, d. h. wenn

$$f'(x+h) = f'(x) + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \text{etc.}$$

ist, so wird

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + a_1 \frac{h^2}{2} + a_2 \frac{h^3}{3} + \cdots + a_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + \text{etc.}$$

Denn, vervollständigt man das Polynom auf der rechten Seite durch Hinzufügen von αh^n und integriert in Bezug auf h, so erhält man

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \cdots + a_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + \int_0^h \alpha h^n dh.$$

Das letzte Glied läfst sich nun $\beta \int_0^h h^n dh = \beta \frac{h^{n+1}}{n+1}$ schreiben, worin β einer der Werte von α in dem Intervall von 0 bis h ist. Weil aber α unendlich klein ist, so mufs dies auch β sein.

Theorem V. Wenn $f(x)$ für den betrachteten Wert von x die successiven Derivierten bis zur n^{ten} hat, so ist:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \text{etc.}$$

Denn, nach der Voraussetzung ist

$$\lim \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} = f^{(n)}(x)$$

oder

$$f^{(n-1)}(x+h) = f^{(n-1)}(x) + hf^{(n)}(x) + \text{etc.}$$

Integriert man nun in Bezug auf h, d. h. wendet man den vorhergehenden Satz an, so erhält man

$$f^{(n-2)}(x+h) = f^{(n-2)}(x) + hf^{(n-1)}(x) + \frac{h^2}{2} f^{(n)}(x) + \text{etc.}$$

Fährt man so fort und integriert noch $n-2$ mal, so ergiebt sich die gesuchte Formel.

Dieses Theorem haben wir schon früher in der *Mathesis*, Bd. IX, S. 110 mitgeteilt.

Auf solche Art sind jene Formeln zu interpretieren und jene Sätze zu beweisen, die in den früheren Jahrhunderten unter den Mathematikern durchaus gebräuchlich waren.

Man beachte jedoch, daſs aus der Thatsache allein, daſs die Funktion $f(x+h)$ sich nach Potenzen von h entwickeln läſst:

$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \text{etc.},$$

noch nicht ihre Kontinuität folgt. So kann, wie schon bemerkt wurde, $f(x)$ für den betrachteten Wert von x diskontinuierlich sein, wenn bei der Annäherung von h an Null $f(x+h)$ einem von $f(x)$ verschiedenen Grenzwert zustrebt. Setzt man die Kontinuität von $f(x)$ für den betrachteten Wert von x voraus, so wird damit noch nicht ihre Kontinuität in der Umgebung von x vorausgesetzt. Bezeichnen wir z. B. mit $\mathsf{E}(z)$ die gröſste in z enthaltene ganze Zahl und setzen $\Theta(z) = z - \mathsf{E}(z)$, so ist die Funktion

$$f(x) = x^{n+1}\,\Theta\left(\frac{1}{x}\right),$$

der wir den Wert 0 für $x=0$ beilegen wollen, für $x=0$ kontinuierlich, läſst sich nach Potenzen von x bis zu dem Glied vom n^{ten} Grade entwickeln, wobei alle Koefficienten Null sind, und doch ist sie in jeder Umgebung des Wertes 0 diskontinuierlich. Die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$, der man für $x=0$ den Wert 0 geben möge, ist unbegrenzt entwickelbar und alle Koefficienten sind Null und doch ist sie in jeder Umgebung von 0 diskontinuierlich.

Wenn sich $f(x+h)$ nach Potenzen von h entwickeln läfst und für den betrachteten Wert von x kontinuierlich ist, d. h. wenn

$$f(x+h) = f(x) + a_1 h + a_2 h^2 + \text{etc.}$$

ist, so folgt daraus, wie schon gesagt wurde, dafs $a_1 = f'(x)$ ist; die von *Lagrange* gegebene Definition, dafs $f'(x)$ der Koefficient von h in der Entwicklung der $f(x+h)$ nach Potenzen von h sei, deckt sich daher mit der Wirklichkeit. Nicht aber folgt daraus, dafs auch $f'(x+h)$ sich in eine Reihe entwickeln lasse und man $f'(x+h) = f'(x) + 2a_2 h + \text{etc.}$ erhalte. Man braucht nur die beiden vorstehenden Beispiele zu betrachten, in denen $f(x)$ sich in Reihen entwickeln läfst, aber in der Umgebung von 0, in der sie diskontinuierlich ist, keine Derivierte hat. Aus der Thatsache daher, dafs

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + a_2 h^2 + \text{etc.}$$

ist, folgt nicht notwendiger Weise, dafs a_2 gleich $\frac{f''(x)}{2}$ sei, denn der Funktion kann in den Umgebungen des betrachteten Wertes von x die erste Derivierte fehlen, sie braucht daher für diesen Wert von x keine zweite Derivierte zu haben.

Die Theoreme I, II und III, welche die Koefficienten der Entwicklung der Summe, des Produktes und Quotienten zweier Funktionen mittelst der Koefficienten dieser Funktionen liefern, wenn man die Existenz der Derivierten voraussetzt, setzen uns in den Stand, auf eine etwas einfachere Art, als die gewöhnliche, die successiven Derivierten eines Produktes und eines Quotienten zu ermitteln. Diese Regeln sind auch etwas allgemeiner als die Differentiationsregeln, da sie auch dann noch ihre Gültigkeit behalten können, wenn die Derivierten fehlen.

Sind die Unendlichkleinen, welche in der Entwicklung von

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

auftreten, variabel oder konstant? Die Antwort auf diese Frage hängt von dem Standpunkt ab, von welchem man sie betrachtet.

Man kann *die Gröfse* $a_n x^n$ betrachten, d. h. *den Wert*, welchen die Funktion $a_n x^n$ annimmt, wenn man dem x einen beliebigen Wert beilegt; dieser Wert ist eine variabele Zahl und wird mit x unendlich klein; auf diese Art erhält man ein variabeles Unendlichkleines.

Oder man betrachte die mit $a_n x^n$ bezeichnete *Funktion*, d. h. die Operation, mittelst welcher man jeder Zahl ihre mit a_n multiplizierte Potenz x^n entsprechen läfst; *diese Funktion oder Operation* *oder Korrespondenz* ist ein konstantes Ding, wenn der Exponent n und der Koefficient a_n gegeben ist. Sind nun mehrere Funktionen $f(x)$, $g(x)$ gegeben und in einem Intervall von 0 an bis zu einer positiven Zahl definiert, so wollen wir übereinkommen, die erste in der Umgebung von 0 gröſser als die zweite zu nennen und $f > g$ zu schreiben, wenn man ein Intervall von 0 bis zu einer positiven Zahl derart bestimmen kann, daſs für jeden Wert von x innerhalb desselben $f(x) > g(x)$ ist. Wir wollen ferner, wie es gebräuchlich ist, die Funktion $mf(x)$ das Vielfache der $f(x)$ in Bezug auf die (reelle) Zahl m nennen. Setzt man nun $f_r(x) = x^r$, so folgt, daſs $f_r(x)$ in der Umgebung von 0 gröſser als jedes Vielfache von $f_{r+1}(x)$ ist; oder, welchen Wert m auch haben mag, jedenfalls ist $f_r > mf_{r+1}$; oder f_{r+1} ist ein konstantes in Bezug auf f_r unendlich kleines Ding, während $f_{r+1}(x)$ ein variabeles in Bezug auf $f_r(x)$ unendlich kleines Ding ist.

Anhang IV

(zu Nr. 193).

Über die Definition des Integrals.

(Auszug aus den Annali di Matematica pura e applicata.)

Prof. *G. Ascoli* hat in einer Abhandlung, die denselben Titel führt (Annali di Matematica, 1895, S. 67), diese wichtige Frage zur Sprache gebracht.

Er nimmt mit Recht die Priorität für seine oberen und unteren Integrale, welche man in seiner Abhandlung *Sul concetto di integrale definito* (Atti dell' Acc. dei Lincei, 1875, S. 863) findet, in Anspruch. Der Genauigkeit wegen möchten wir jedoch bemerken, dafs gleichzeitig *Darboux* in seiner Abhandlung *Sur les fonctions discontinues* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1875, S. 57) dieselben Dinge betrachtet und ähnliche Theoreme beweist. Wenn man statt des Datums der Zeitschrift das Datum der Abhandlung berücksichtigen wollte, so würde die Arbeit *Darboux*'s (vom 19. März 1873 und 28. Januar 1874) derjenigen *Ascoli*'s (vom 6. Juni 1875) sogar vorangehen.

Wir möchten hier die Aufmerksamkeit des Lesers auf einige Untersuchungen lenken, die wir über diesen Gegenstand angestellt haben, und welche, wie wir glauben, die Sache vereinfachen, und auch von Anderen, soviel wir wissen, noch nicht gebracht worden sind.

Der Gedanke, den wir auch in anderen Arbeiten zum Ausdruck brachten, besteht in der Substitution der oberen (oder unteren) Grenze einer Zahlengruppe an die Stelle der Grenze, gegen welche eine Funktion konvergiert. Es wird wohl schwer sein, festzustellen, wer zuerst diese beiden ähnlichen Begriffe unterschieden hat, welche auch heute noch von solchen verwechselt werden, die keine präzise Sprache benutzen. Man pflegt die Unterscheidung *Weierstrass* (siehe Pincherle, Giornale di Matematiche, 1880, S. 242) zuzuschreiben; man findet diese oberen und unteren Grenzen in den zitierten Arbeiten von *Darboux* und *Ascoli* und kann sagen, dafs sie in das allgemeine Besitztum übergegangen sind.

Die Definition in dem „Formulario di Matematica", Teil V, § 3, prop. 1 lautet:

$$1)\ u \varepsilon \mathrm{K} q \,.\, u \sim = \Lambda \,.\, x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\!\cdot\,.$$
$$x = \mathrm{l}' u \,.=:\, u \frown (x + \mathrm{Q}) = \Lambda : y \varepsilon x - \mathrm{Q} \,.\supset.\, y u \frown (y + \mathrm{Q}) \sim = \Lambda;$$

in Worten: ‚Wenn u eine Klasse reeller Zahlen und nicht eine Klasse Null ist (da in der mathematischen Logik auch Klassen Null vorkommen), und wenn x eine endliche Zahl ist, alsdann bedeutet der Satz „x ist die obere Grenze der u" so viel als

1) „Es giebt keine Zahlen des Systems u, die gröfser als x sind."

2) „Wenn eine Zahl y, die kleiner als x ist, beliebig gegeben wird, so giebt es Zahlen des Systems u, die gröfser als y sind."

Führt man nun die obere unendlich grofse Grenze ein, deren Definition (Formulario, Teil V, § 3, prop. 5) wir hier nicht wiederholen wollen, so erhält man die Grundeigenschaft (ebenda, prop. 6):

$$2)\ \text{Hyp. } 1 \,.\supset.\, \mathrm{l}' u \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty.$$

„Jede Klasse u hat immer eine obere Grenze, die endlich oder unendlich grofs ist."

Es wird nicht überflüssig sein, wenn wir bemerken, dafs der Beweis dieses Theorems lediglich eine Umgestaltung der Definition der irrationalen Zahlen ist.

Komplizierter erscheint die Definition der Grenze, welcher eine Funktion zustrebt. Diese Funktion kann von einer oder mehreren unabhängigen Variabelen abhängen; es kann auch vorkommen, dafs die Anzahl der unabhängigen Variabelen variabel ist, wie es gerade bei den Sätzen, die uns hier beschäftigen, der Fall ist. Wenn wir uns auf eine unabhängige Variabele beschränken und voraussetzen, sie strebe dem Unendlichgrofsen zu — auf diesen Fall läfst sich immer reduzieren —, so wird der gewöhnliche Begriff der Grenze einer Funktion durch den folgenden Satz ausgedrückt (Formulario, Teil VII; § 2, prop. 1):

$$3)\ u \varepsilon \mathrm{K} \mathrm{q} \,.\, l' u = \infty \,.\, f \varepsilon \mathrm{q} \mathrm{f} u \,.\, y \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset ::$$
$$y = \lim_{x, u, \infty} f x \,.=.\!\cdot\,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset_h : a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \supset (y - h) \vdash\!\dashv (y + h).$$
$$\sim =_a \Lambda.$$

„Es sei u eine Klasse von Zahlen, deren obere Grenze das Unendlichgrofse ist. f sei das Zeichen einer reellen durch die Zahlen der Gruppe u definierten Funktion und y sei eine endliche Zahl. Alsdann bedeutet der Satz, y sei die Grenze, welcher die Funktion $f(x)$ zustrebt, wofern x in der Klasse u variiert und sich dabei dem Unendlichgrofsen nähert, soviel als: Wie man auch die positive Gröfse h nehmen mag, man kann immer eine Zahl a derart bestimmen, dafs die Werte, welche die Funktion $f(x)$ annimmt, wofern die Variabele in der Klasse u nur solche Werte erhält, die gröfser als a sind, sämtlich dem Intervall von $y - h$ bis $y + h$ angehören."[1])

Man sieht, die Definition 3 ist komplizierter als die erste. Betrachtet man die verwendeten Symbole, so ergiebt sich, dafs bei der ersten nur der Begriff der Klasse (in Zeichen K) vorkommt, während die dritte auch noch den Begriff der Funktion oder Korrespondenz enthält (in Symbolen f).

Es existiert ferner kein Satz, der dem zweiten analog wäre; während jede Klasse eine obere Grenze hat, konvergiert jede Funktion nicht gegen einen Grenzwert. Man könnte allerdings eine gewisse Analogie herstellen, wenn man den Begriff der Grenze einer Funktion so modifizierte, wie wir es in der *Rivista di Matematica*, 1892 und in dem *American Journal of Mathematics*, 1895 gethan haben, und auf diese Art auf die Begriffe von *Cauchy* und *Abel* zurückginge, nach welcher jede Funktion Grenzwerte hat. Doch wollen wir uns dabei nicht länger aufhalten.

Wer freilich die oberen Grenzen von Gruppen von Punkten und ähnliche Begriffe mit Hülfe der Grenzen, welchen die Funktionen zustreben, definiert, der drückt einen einfachen Gedanken durch kompliziertere aus und setzt sich auch noch anderen Unzuträglichkeiten aus. Es wird von Nutzen sein, eine solche Definition dem klassischen Werk *Jordan's*, Cours d'Analyse, 2. Aufl., 1892, S. 19 des 1. Bandes zu entnehmen. Er sagt:

„On nomme point limite d'un ensemble tout point qui est la limite d'une suite de points de l'ensemble."

Bezeichnet man die Gruppe mit u, so läfst sich diese Definition in Symbolen auf die folgende Art ausdrücken:

$$(z\varepsilon \text{ Grenzpunkt von } u) = (f\varepsilon u f \mathrm{N} \,.\, z = \lim fx \,.\, \sim =_f \Lambda).$$

Da man nun eine Folge von gleichen Zahlen betrachten kann oder auch eine Funktion sich auf eine Konstante reduzieren kann, so folgt daraus, dafs jeder Punkt der Gruppe ein Grenzpunkt von ihr ist, weil er als die Grenze einer Folge mit ihm zusammenfallender Punkte angesehen werden kann. Folglich ist die Gesamtheit der Grenzpunkte von u nicht die (in dem *Formular* mit Du bezeichnete) derivierte Klasse von u, sondern die abgeschlossen gemachte Klasse u (in dem Formular Cu).[2]) Die Definitionen der Klassen Du und Cu werden in dem Formular, Teil V, § 5, prop. 1 und § 7, prop. 1 gegeben.

---

1) Das Intervall von p bis q wird mit dem Symbol $p \mapsto q$ bezeichnet.

2) Das italienische Wort chiuso entspricht dem *fermé, abgeschlossen*, G. Cantor's und dem *parfait* Jordan's; das *perfect* Cantor's hat eine andere Bedeutung.

Nachdem wir gesehen haben, dafs der Begriff der oberen (oder unteren) Grenze einer Klasse an sich einfacher als derjenige der Grenze ist, welcher eine Funktion zustrebt, wollen wir jetzt untersuchen, welche Vereinfachungen die Substitution des ersten Begriffs an Stelle des zweiten bei gewissen Fragen der Analysis herbeiführt.

Man definiert gewöhnlich die Länge eines Kurvenbogens als die Grenze, welcher die Länge eines eingeschriebenen Polygons zustrebt, wenn seine Seiten unbegrenzt abnehmen. Diese Definition setzt den Beweis voraus, dafs unter gewissen Bedingungen eine solche Grenze existiert, und der Beweis ist lang. Auch noch eine andere Schwierigkeit findet sich in dem Buche Jordan's, die wir zeigen wollen. Die Länge des dem Bogen eingeschriebenen Polygons ist abhängig von der Art, wie der Bogen zerlegt wird, d. h. eine Funktion der Werte $t_1, t_2, \ldots, t_n$, die man der unabhängigen Variabelen zulegt, und diese Variabelen $t_1, \ldots, t_n$ variieren auch der Anzahl nach, die unbegrenzt wächst. Nun definiert der Verfasser auf S. 8 nur die Grenze „d'une suite illimitée de valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$", d. h. einer qfN; mit anderen Worten x_n ist eine Gröfse, die von der ganzen positiven Zahl n abhängt; nicht definiert wird aber die Grenze einer Gröfse, welche von der Art abhängt, wie ein Intervall zerlegt wird. Diese Lücke läfst sich jedoch ausfüllen, wenn man die richtige Definition benutzt[1]).

Alle diese Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man die folgende Definition zu Grunde legt (siehe unsere Applicazioni geometriche del Calcolo, 1887, S. 162):

„Länge eines Bogens heifst die obere Grenze der Längen der ihm eingeschriebenen Polygone."

Daraus folgt, dafs jeder Bogen nach Theorem 2 eine endliche oder unendlich grofse Länge hat, ohne dafs man weitere Beweise nötig hätte. Man beachte die Leichtigkeit, mit welcher man die Formeln für die Bogen erhält, und die Analogie oder vielmehr das Zusammenfallen dieser Definition mit dem Postulat 2 des Archimedes (von dem Kreis und dem Cylinder).

Wir gehen schliefslich zur Definition des Integrals über. Es sei fx eine in dem ganzen Intervall von a bis b definierte Funktion, die eine endliche obere und untere Grenze hat, d. h.:

$$a, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\, f \varepsilon \mathrm{q\,f}\, a \vdash b \,.\, \mathrm{l}' f(a \vdash b),\ \mathrm{l}_1 f(a \vdash b) \varepsilon \mathrm{q}.$$

1) D'Arcais, Calcolo infinitesimale, Bd. II, S. 3, 1894.

Man betrachte die Summen

$$S' = \sum_{r=0}^{r=n} (x_{r+1} - x_r)\, \mathrm{l}' f(x_r \vdash x_{r+1}),$$

$$S_1 = \sum (x_{r+1} - x_r)\, \mathrm{l}_1 f(x_r \vdash x_{r+1}),$$

in welchen $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},\ x_n = b$ die Teilpunkte des gegebenen Intervalls sind; S' ist die Summe der Produkte der Ausdehnung der Teilintervalle mit den oberen Grenzen der Werte der Funktion in ihnen. In der Summe S_1 dagegen treten statt der oberen die unteren Grenzen auf.

Darboux und *Ascoli* beweisen beide, dafs sowohl S' wie S_1 bei der Annäherung der Teilintervalle an Null einer bestimmten Grenze zustreben, und dafs die gegebene Funktion, wenn die Grenze, welcher S' zustrebt, mit der Grenze von S_1 zusammenfällt, integrierbar ist.

Wir halten es für einfacher, diesem Theorem die Gestalt zu geben:

„Wenn die untere Grenze der Werte von S' der oberen Grenze der Werte von S_1 gleich kommt, so ist die Funktion integrierbar.“

In der Abhandlung *„Sull' integrabilità delle funzioni* (Atti della R. Accademia di Torino, 1883) haben wir einen direkten Beweis dieses Satzes gegeben. In dem Vorstehenden wurde eine Funktion integrierbar im Sinne *Riemann*'s genannt (Werke, S, 226). Man könnte aber, wie uns scheint, eine noch gröfsere Vereinfachung erzielen, wenn man auch die Definition des Integrals modificierte; in den *Lezioni di Analisi infinitesimale* geben wir die folgenden Definitionen:

„*Das obere Integral* $\left(\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx\right)$ nennen wir die untere Grenze der Werte von S', *das untere Integral* $\left(\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx\right)$ die obere Grenze der Werte von S_1. Wenn das obere Integral mit dem unteren zusammenfällt, so heifst die Funktion integrierbar und ihr gemeinschaftlicher Wert ist $\int_a^b f(x)\,dx$.“

Auf diese Weise ist der Wert, dem eine Funktion zustrebt, in der Definition des Integrals durch die oberen und unteren Grenzen der Klassen vollkommen festgestellt.

Anhang V.

Die komplexen Zahlen.

(Aus Peano, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, 1893 Kap. 6.)

§ 1. Der Komplex von n reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heifst *komplexe Zahl von der* n^{ten} *Ordnung*, zur Abkürzung q_n. Eine komplexe Zahl wird auch mit einem einzigen Buchstaben bezeichnet; um anzugeben, dafs x der Komplex der Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ist, schreiben wir

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heifsen die *Elemente* oder *Koordinaten* des Komplexes x.

Zwei Komplexe $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ heifsen *gleich*, wenn ihre Elemente bezüglich gleich sind:

$$(1) \qquad x = y \,.=.\, x_1 = y_1 \,.\, x_2 = y_2 \ldots x_n = y_n.$$

Die *Summe* zweier Komplexe ist der Komplex, der zu Elementen die Summen der Elemente der gegebenen Komplexe hat:

$$(2) \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Analog wird die *Differenz* definiert:

$$(3) \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n).$$

Unter dem Produkt einer reellen Zahl a und eines Komplexes x versteht man den Komplex, dessen Elemente die mit a multiplizierten Elemente von x sind:

$$(4) \qquad a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$

Unter den Komplexen kommt auch derjenige in Betracht, dessen sämtliche Elemente Null sind, und der mit 0 bezeichnet wird:

$$(5) \qquad 0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Setzt man

$$i_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ i_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$$
$$i_n = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

so läſst sich ein beliebiger Komplex durch seine Koordinaten ausdrücken:

$$(6) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n.$$

§ 2. Die vorstehenden Vereinbarungen sind durchaus einfach und natürlich; die Operationen mit den q_n besitzen die Eigenschaften der analogen Operationen mit den q. So bestehen z. B. die Beziehungen:

$$x, y, z \varepsilon \mathrm{q}_n . a, b \varepsilon \mathrm{q} . \supset :$$
$$x + y \varepsilon \mathrm{q}_n$$
$$x + y = y + x$$
$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$
$$x - x = 0$$
$$ax \varepsilon \mathrm{q}_n$$
$$a(x + y) = ax + ay$$
$$(a + b)x = ax + bx$$
$$a(bx) = (ab)x.$$

Wir sind nun zunächst vor die Frage gestellt, wie das Produkt zweier oder mehrerer komplexer Zahlen zu definieren sei; die Frage ist schwer zu beantworten, wir wollen uns nicht mit ihr beschäftigen und nur bemerken, daſs die einzelnen Autoren, von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, auch zu verschiedenen Multiplikationsarten gekommen sind. Diese haben alle die Distributionseigenschaft in Bezug auf die Addition gemeinschaftlich, die durch die Formeln

$$(x + y) z = xz + yz$$
$$x (y + z) = xy + xz$$

ausgedrückt wird.

Wenn daher die Komplexe durch die Koordinaten

$$x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n,$$
$$y = y_1 i_1 + y_2 i_2 + \cdots + y_n i_n$$

ausgedrückt werden, so erhält man bei der Ausführung der Multiplikation verschiedene Glieder von der Form $x_r y_s i_r i_s$; die Frage reduciert sich daher darauf, wie man die Produkte $i_r i_s$ zu definieren habe, und in dieser Definition weichen die Autoren von einander ab. So kann man z. B. das Produkt von n komplexen Zahlen von der n^{ten} Ordnung die Determinante nennen, welche aus den Elementen dieser Komplexe gebildet wird; die Distributionseigenschaft

$$(x + y)zt \dots u = xzt \dots u + yzt \dots u.$$

drückt eine bekannte Eigenschaft der Determinanten aus.

§ 3. Unter dem *Modul* einer komplexen Zahl x oder abgekürzt $\bmod x$ oder $\mathrm{m}x$ versteht man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Elemente von x:

$$\text{(1)} \qquad \bmod (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Der Modul ist eine positive Zahl und verschwindet nur, wenn die komplexe Zahl Null wird.

Der Modul der Summe ist nicht gröfser, als die Summe der Moduli:

$$\text{(2)} \qquad x, y \varepsilon \mathrm{q}_n \,.\, \supset \,.\, \mathrm{m}(x + y) \leqq \mathrm{m}x + \mathrm{m}y.$$

Denn es ist, wie man aus der Algebra weifs,

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geqq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2;$$

zieht man nun die Quadratwurzeln aus, so erhält man

$$\bmod x \bmod y \geqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

und, wenn man mit 2 multipliziert und den Ausdruck

$$(\mathrm{m}x)^2 + (\mathrm{m}y)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

addiert:

$$(\mathrm{m}x + \mathrm{m}y)^2 \geqq (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2.$$

Nimmt man schliefslich auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man die Formel, die zu beweisen war.

Offenbar gilt auch

$$a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, x \varepsilon \mathrm{q}_n \,.\, \supset \,.\, \bmod (ax) = (\bmod a)(\bmod x).$$

§ 4. Eine komplexe Zahl von der n^{ten} Ordnung dient zur Bestimmung eines Dinges, das von n Koordinaten abhängt. So wird z. B. die Lage eines Punktes im Raum von einem System von drei Koordinaten oder einem q_3 bestimmt. Nimmt man rechtwinklige Axen, so stellt der Komplex $(0, 0, 0)$ den Koordinatenanfang dar; der Modul des Komplexes (x, y, z), d. h. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist der Abstand des Koordinatenanfangs von dem Punkt, dessen Koordinaten (x, y, z) sind. Der Abstand zweier durch die Komplexe $a = (x, y, z)$ und $a' = (x', y', z')$ dargestellten Punkte ist $\bmod (a - a')$.

Man beachte, daſs ein Punkt nicht etwa ein Komplex dritter Ordnung, d. h. ein q_3 ist; zwischen den Punkten und diesen Komplexen kann man nur eine gegenseitige eindeutige Korrespondenz herstellen. Doch läſst sich, der Neigung der gewöhnlichen Sprache zu bildlichen Ausdrücken entsprechend, die Vereinbarung treffen, mit demselben Wort *Punkt* das eine wie das andere Ding zu bezeichnen; ja man kann auch *Punkt einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* nennen, was wir eben unter einem Komplex der n^{ten} Ordnung verstanden haben, und der Gröſse $\operatorname{mod}(a - a')$ den Namen „Abstand der beiden Punkte a und a'" geben. Wir werden, wenn es uns paſst, uns dieser Ausdrücke in der gewöhnlichen Sprache bedienen, niemals aber in den Formeln.

Sind zwei Punkte A und B im Raum gegeben, so hängt der Punkt, welcher durch die Summe der A und B vorstellenden Komplexe dargestellt wird, nicht nur von der Lage dieser Punkte, sondern auch vom Anfangspunkt der Axen ab.

Es giebt aber auch noch andere Systeme von Dingen, die sich durch komplexe Zahlen darstellen lassen und für welche sich die Operation des Summierens direkt definiren läſst. Solche Systeme sind z. B. die *Vektoren.*

Systeme von Komplexen.

§ 5. Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Systeme oder Klassen von Komplexen ($\mathrm{K}q_n$) übergehen. Stellt man die Komplexe durch Punkte dar, so bildet eine Klasse von Punkten einen geometrischen Ort oder eine Figur; ihre Gestalt ist durchaus beliebig; die Punkte können in endlicher oder unendlich groſser Anzahl vorhanden sein und Linien, Flächen, Körper etc. hervorbringen. So bilden die Eckpunkte eines Polyeders, die Punkte in den Kanten des Polyeders, die in den Seitenflächen und die Punkte im Innern des Polyeders ebensoviele Klassen von Punkten.

Ist x ein q_n und nicht Null, so ist $\operatorname{mod} x$ oder $\mathrm{m}x$ ein Q. Es sei nun $\mathrm{m}x = a$; diese Gleichung läſst sich auch lesen $x \varepsilon \overline{\mathrm{m}} a$, d. h. „$x$ ist ein Komplex vom Modul a". Wenn mithin a ein Q ist, so stellt $\overline{\mathrm{m}} a$ die Klasse der Komplexe vom Modul a dar oder die Oberfläche einer Kugel vom Radius a, deren Centrum im Koordinatenanfang liegt.

Wir wollen der Kürze wegen mit Θ das Intervall $0 \mapsto 1$ mit Einschluſs der Enden bezeichnen:

$$\Theta = 0 \mapsto 1.$$

Wenn dann $a \varepsilon \mathrm{Q}$, so stellt Θa das Intervall $0 \mapsto a$ dar und $\overline{\mathrm{m}} \Theta a$ die Gesamtheit der Komplexe, deren Modul nicht gröſser als a ist. Wenn $x \varepsilon q_n$ und $a \varepsilon \mathrm{Q}$, so stellt $x + \overline{\mathrm{m}} \Theta a$ die Komplexe dar, die man erhält, wenn zu x ein Komplex von einem Modul hinzugefügt wird, der kleiner als a oder gleich a ist, oder die Gesamtheit der Komplexe, die von x sich um einen Modul unterscheiden, der nicht grösser als a ist, oder, wie wir in der Regel sagen werden, *die Kugel vom Centrum x und dem Radius a.* Eine Kugel mit dem Centrum x heisst auch *eine Umgebung von x.*

§ 6. Ist u eine Kq_n, so sagen wir, sie sei *begrenzt*, wenn der Modul der Zahlen des Systems u keine beliebig grossen Werte annimmt; d. h. wenn $\mathrm{l}'\mathrm{m}u\,\varepsilon\,\mathrm{Q}$. Jede begrenzte Klasse u ist in der Kugel vom Radius $\mathrm{l}'\mathrm{m}u$, deren Centrum im Koordinatenanfang liegt, eingeschlossen.

Begrenzte Klassen sind alle diejenigen, welche von einer endlichen Anzahl von Punkten gebildet werden. Der Kreisumfang, die Ellipse, der Kreis, die Oberfläche der Kugel, die Kugel etc. sind ebenfalls begrenzte Klassen von Punkten. Die Gerade, die Ebene, der ebene Winkel, der körperliche Winkel, die Spirale des Archimedes etc. sind unbegrenzte Klassen.

Es sei u eine Kq_n und x ein q_n. Der Ausdruck $u - x$ stellt die q_n dar, die man durch Subtraktion des x von jedem u erhält. Die untere Grenze der Moduln von $u - x$, d. h. $\mathrm{l}_1\mathrm{m}(u - x)$, heisst manchmal *der Abstand* des x von der Klasse u. Die Komplexe x, für welche dieser Abstand Null ist, bilden eine Klasse, die wir Cu nennen wollen.

Wenn man also sagt, x sei ein Punkt von Cu, so bedeutet dies, die untere Grenze der Abstände des x von den verschiedenen Punkten von u sei Null:

(1) $$x\,\varepsilon\,Cu\,.=.\,\mathrm{l}_1\mathrm{m}(u - x) = 0.$$

Zahlen der Klasse Cu sind alle Individuen der Klasse u, weil für sie der kleinste Modul der Differenz $u - x$ Null ist:

(2) $$u \supset Cu.$$

Ferner gehören zur Klasse Cu diejenigen Punkte, welche zwar nicht Punkte von u, aber so beschaffen sind, dass in jeder ihrer Umgebungen Punkte von u in notwendigerweise unendlich grosser Anzahl existieren.

Wenn die Klasse u eine endliche Anzahl von Punkten enthält, so fällt Cu mit u zusammen.

Ist die Klasse u ein Intervall $a \frown b$ mit Ausschluss der Enden, so ist Cu das Intervall $a \mapsto b$ mit Einschluss der Enden.

Ist die Klasse u die Gesamtheit der Punkte im Innern einer Kugel, so ist Cu die Gesamtheit der Punkte im Innern und auf der Oberfläche der Kugel.

Wenn u die Klasse der rationalen Zahlen ist, so stellt Cu die reellen Zahlen dar.

Ist u eine Klasse reeller Zahlen, so ist die obere Grenze der u, wenn sie endlich ist, ein Punkt von Cu.

Dasselbe gilt von der unteren Grenze.

Es sei eine Klasse u gegeben und man habe daraus die Cu abgeleitet. Verfährt man nun mit ihr auf dieselbe Art, so erhält man die CCu; diese neue Klasse fällt aber mit der früheren zusammen, oder:

(3) $$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, \supset \,.\, CCu = Cu.$$

Denn, wenn $x \varepsilon\ CCu$, und man setzt nach Belieben eine positive Zahl $2h$ fest, so existieren Punkte von Cu, deren Abstand von x kleiner als h ist; ist nun y ein solcher Punkt, so existieren, weil y ein Punkt von Cu ist, Punkte von u, die von y um weniger als h abstehen.

Mithin giebt es Punkte von u, deren Abstand von x kleiner als die beliebig kleine Gröfse $2h$ ist. Die untere Grenze der Abstände des x von den Punkten der u ist daher Null, oder x ist ein Punkt von Cu; also:

$$x \varepsilon CCu \,.\, \supset \,.\, x \varepsilon Cu,$$

wofür man auch schreiben kann:

(a) $$CCu \supset Cu.$$

Auf der anderen Seite erhält man, wenn u in (2) durch Cu ersetzt wird:

(b) $$Cu \supset CCu;$$

aus (a) und (b) ergiebt sich die Behauptung.

Eine Klasse u heifst *geschlossen*, wenn sie mit Cu zusammenfällt, oder wenn $Cu = u$ ist. Aus dem eben bewiesenen Satz ergiebt sich: wenn eine beliebige Klasse u gegeben wird, so ist die Klasse Cu geschlossen, weil $CCu = Cu$. Aus diesem Grund kann man auch statt Klasse Cu sagen: *die geschlossen gemachte Klasse u.*

Das Intervall Θ, die Kugel $x + \overline{\mathrm{m}}\Theta h$, etc. sind geschlossene Klassen.

§ 7. Es seien u und v zwei Kq_n und man denke sich die Klasse $u \cup v$, die aus den Punkten gebildet ist, welche wenigstens einer der beiden Klassen angehören. Nimmt man einen beliebigen Punkt x, so ist der Abstand zwischen x und $u \cup v$ der kleinste der Abstände zwischen x und u und zwischen x und v, oder:

$$u, v \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x \varepsilon \mathrm{q}_n \,.\, \supset \,.\, \mathrm{l_1 m}\,[(u \cup v) - x] =$$
$$= \min\,[\mathrm{l_1 m}\,(u - x), \mathrm{l_1 m}\,(v - x)].$$

Wenn mithin der Abstand zwischen x und $u \cup v$ Null ist, d. h. wenn $x \varepsilon C(u \cup v)$, so mufs wenigstens einer der beiden Abstände zwischen x und u und zwischen x und v Null sein, d. h.

x ist entweder ein Cu oder $x \varepsilon Cv$; und umgekehrt: wenn einer dieser Abstände Null ist, so mufs es auch der Abstand zwischen x und $u \cup v$ sein, oder:

(1) $$u, v \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, \supset \,.\, C(u \cup v) = Cu \cap Cv.$$

Es giebt noch andere Sätze über die Klassen Cu, die wir hier aber ohne Beweis bringen, weil sie in der Folge nicht vorkommen.

Es seien u und v Klassen von q_n. Wenn u in v enthalten ist, so mufs auch Cu in Cv enthalten sein:

(2) $$u \supset v \,.\, \supset \,.\, Cu \supset Cv.$$

Die Klasse $C(u \cap v)$, d. h. der geschlossen gemachte, den beiden Klassen u und v gemeinschaftliche, Teil ist in dem Teil enthalten, welcher den geschlossen gemachten Klassen u und v gemeinschaftlich ist:

(3) $$C(u \cap v) \supset (Cu) \cap (Cv).$$

Sind endlich die Klassen u und v geschlossen, so kann man statt des Zeichens $\supset$ auch $=$ lesen.

§ 8. Es kommt vor, dafs man, wenn eine Klasse u gegeben ist, Punkte x von der Beschaffenheit zu betrachten hat, dafs der Abstand zwischen x und den *anderen* Punkten der Figur u, d. h. den von x verschiedenen Punkten der Figur u Null ist. Diese Punkte bilden eine Klasse, welche die *Derivierte* von u heifst und mit Du bezeichnet wird.

Wir wollen für den Augenblick ι (ἴσος) anstatt des *gleich* schreiben. ιx bedeute also *gleich* x und $\sim \iota x$ *verschieden von* x; doch beachte man, dafs das Zeichen $=$ nicht gleichbedeutend mit ι ist, sondern mit $\varepsilon \iota$.

Die Klasse Du läfst sich dann so definieren:

(1) $$x \varepsilon Du \,.\, = \,.\, \mathrm{l}_1 \mathrm{m}\, [(u \sim \iota x) - x] = 0.$$

Die Klassen Cu und Du sind zwar begrifflich verschieden, aber durch Beziehungen miteinander verbunden. Wenn x ein Punkt von Cu ist, aber nicht von u, alsdann ist $u \sim \iota x = u$ (die von x verschiedenen u sind die sämtlichen u); mithin ist dieser Punkt ein Punkt von Du:

(a) $$(Cu) \sim u \supset Du.$$

Umgekehrt ist jeder Punkt von Du ein Punkt von Cu:

(b) $$Du \supset Cu.$$

Aus (a) und (b) sowie aus (2) in § 6 ergiebt sich

(2) $$Cu = u \cup Du,$$

d. h. die Klasse Cu ist das aus der Klasse u und ihrer Derivierten gebildete Ganze.

Während die Klasse Cu die u enthält, braucht Du die u nicht immer zu enthalten; ist es aber der Fall, ist also $u \supset Du$, so mufs $Cu = Du$ sein, d. h. die geschlossen gemachte Klasse u und die derivierte Klasse müssen alsdann zusammenfallen. Es kann aber vorkommen, dafs Punkte von u existieren, welche der derivierten Klasse nicht angehören; dies sind solche Punkte von u, in deren Umgebung andere Punkte von u nicht existieren. Solche Punkte $u \sim Du$ heifsen *isolierte Punkte* von u. Die Klasse Cu ist dann identisch mit der Derivierten von u, d. h. Du, wenn man zu der letzteren die isolierten Punkte von u hinzufügt.

Die derivierten Klassen besitzen bemerkenswerte Eigenschaften, von denen wir die beiden folgenden anführen:

$$(3) \qquad DDu \supset Du,$$

$$(4) \qquad D(u \cup v) = Du \cup Dv.$$

§ 9. Wir haben auch Klassen von Klassen komplexer Zahlen KKq_n zu betrachten, d. h. Systeme von Gruppen von Punkten. Jeder der Ausdrücke „begrenzte Klasse", „geschlossene Klasse", „die den Punkt x enthaltende Klasse", „Kugel", etc. stellt eine KKq_n vor. Oft wird eine KKq_n durch eine Eigenschaft bestimmt, z. B. durch die Eigenschaft „begrenzt zu sein", „geschlossen zu sein", „x zu enthalten", „die Gestalt einer Kugel zu haben", etc. und in der gewöhnlichen Sprache ist es vielleicht bequemer von „Eigenschaften der Klassen der q_n" zu sprechen, als von „Klassen von Klassen der q_n". Es sei u eine KKq_n, d. h. eine Eigenschaft der Punktmengen. Wir wollen diese Eigenschaft *distributiv* nennen und $u \varepsilon (\mathrm{KKq}_n)$ distrib. schreiben, *falls jedesmal, wenn die Summe zweier Mengen c und c', d. h. $c \cup c'$ die Eigenschaft u hat, wenigstens die eine von ihnen dieselbe Eigenschaft besitzt und falls umgekehrt, wenn die eine der Mengen c und c' die Eigenschaft u hat, auch ihre Summe $c \cup c'$ diese Eigenschaft besitzt.*

Nimmt man also an $u \varepsilon (\mathrm{KKq}_n)$ distrib., so erhält man nach der Definition:

$$(1) \qquad c \cup c' \varepsilon u \,.=.\, (c \varepsilon u) \cup (c' \varepsilon u).$$

So ist z. B. die Eigenschaft einer Klasse, unbegrenzt zu sein, eine distributive; denn, zerlegt man eine unbegrenzte Klasse in Teile, so ist wenigstens der eine von ihnen auch unbegrenzt, und umgekehrt, wenn einer der Teile unbegrenzt ist, so mufs es auch die ganze Klasse sein.

Man habe im Raum eine Gesamtheit s von Punkten in unendlich grofser Anzahl. Wenn dann eine Menge c gegeben ist, so kann sie eine endliche Anzahl oder eine unendlich grofse von Punkten des Systems s enthalten. Die Eigenschaft: „Die Menge c enthält unendlich viele Punkte des Systems s“ ist eine distributive; denn, wenn c unendlich viele Punkte von s enthält und man es in Teile zerlegt, so mufs wenigstens einer von ihnen unendlich viele Punkte des Systems enthalten; und umgekehrt, wenn einer der Teile unendlich viele Punkte enthält, so mufs dasselbe auch für die ganze Menge gelten.

§ 10. Die Eigenschaft (1) ist äquivalent mit den beiden folgenden (2) und (3) zusammengenommen:

$$c \cup c' \varepsilon u \,.\, \supset .\, (c \varepsilon u) \cup (c' \varepsilon u), \tag{2}$$

$$(c \varepsilon u) \cup (c' \varepsilon u) \,.\, \supset .\, c \cup c' \varepsilon u. \tag{3}$$

Die Eigenschaft (3) läfst sich in zwei zerlegen, von denen die eine

$$c \varepsilon u \,.\, \supset .\, c \cup c' \varepsilon u \tag{4}$$

lautet und die andere gefunden wird, wenn man in (4) c mit c' vertauscht; diese letztere drückt daher dasselbe aus wie (4).

Ist ferner c eine Klasse, so stellt $c \cup c'$ eine beliebige Klasse vor, die c enthält; der Formel (4) kann man daher auch die Gestalt geben

$$c \varepsilon u \,.\, c \supset c' \,.\, \supset .\, c' \varepsilon u. \tag{5}$$

Mithin läfst sich der Satz (1), welcher die distributiven Eigenschaften charakterisiert, durch die Sätze (2) und (5) zusammengenommen ersetzen; also:

Man sagt, u sei eine distributive Eigenschaft von Punktmengen, wenn bei der Zerlegung einer Menge, welche die Eigenschaft u besitzt, wenigstens einer dieser Teile die Eigenschaft u hat und wenn aufserdem jede Menge, welche eine Menge enthält, die diese Eigenschaft besitzt, dieselbe Eigenschaft hat.

Man pflegt auch die durch das Zeichen Λ dargestellte Klasse Null als eine Klasse anzusehen. Wenn u eine distributive Eigenschaft ist, und wenn die Menge Λ die Eigenschaft u hat, d. h. wenn $\Lambda \varepsilon u$, und man substituiert in (4) an Stelle des c das Λ, so ergiebt sich $c' \varepsilon u$, also: jede Menge hat die Eigenschaft u. Nun wollen wir aber offenbar von Eigenschaften sprechen, die nicht allen Mengen gemeinsam sind; wir müssen daher die Menge Null von unseren Betrachtungen ausschliefsen, d. h. annehmen:

$$u \varepsilon (\mathrm{KK}q_n) \text{ distrib.} \supset .\, \Lambda \sim \varepsilon u. \tag{6}$$

§ 11. Die Einführung der etwas philosophischen distributiven Eigenschaften gestattet uns nun das folgende wichtige Theorem aufzustellen, das man *Cantor* verdankt (Mathem. Ann., Bd. 23, S. 454):

Theorem. Es sei u eine distributive Eigenschaft der Punktmenge und s eine begrenzte Menge, welche die Eigenschaft u hat, alsdann existiert ein Punkt x der geschlossen gemachten Menge s von der Beschaffenheit, dafs jede Kugel vom Centrum x die Eigenschaft u hat:

$$u\varepsilon(\mathrm{KKq}_n)\,\mathrm{distrib.}\ s\varepsilon u\,.\,\mathrm{l'm}s\varepsilon\mathrm{Q}\,.\,\supset .\!\cdot.$$
$$x\varepsilon Cs : k\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset_k.\, x + \overline{m}\Theta k\varepsilon u : \sim =_x\Lambda.$$

Der Beweis wird so geführt:

Wir wollen annehmen, die q_n seien von der dritten Ordnung (x, y, z) und wollen sie durch Punkte darstellen. Da die Klasse s begrenzt ist, so sind die Koordinaten der Punkte von s zwischen endlichen Grenzen enthalten; es sei $(a \mapsto a', b \mapsto b', c \mapsto c')$ ein Parallelepipedon, welches die Klasse s umschliefst. Man halbiere die Kanten des Parallelepipedons und lege durch die Teilungspunkte den Seitenflächen parallele Ebenen. Dadurch wird das Parallelepipedon in 2^3 solche Figuren geteilt und die gegebene Menge in die gleiche Anzahl von Teilen oder in weniger als 8 Teile zerlegt (die Anzahl ist kleiner, wenn irgend eines der Teilparallelepipeda einen Punkt von s nicht enthält). In Folge der gemachten Hypothesen mufs einer dieser Teile die Eigenschaft u besitzen. Die Teilmenge von s, welche die Eigenschaft u hat, möge in dem Parallelepipedon $(a_1 \mapsto a_1', b_1 \mapsto b_1', c_1 \mapsto c_1')$ enthalten sein. Alsdann ist

$$a_1 \geqq a,\ b_1 \geqq b,\ c_1 \geqq c;\quad a_1' \leqq a',\ b_1' \leqq b',\ c_1' \leqq c'$$

und

$$a_1' - a_1 = \frac{1}{2}(a' - a),\ b_1' - b_1 = \frac{1}{2}(b' - b),$$
$$c_1' - c_1 = \frac{1}{2}(c' - c).$$

Man verfahre mit der so erhaltenen Menge auf dieselbe Art wie mit der gegebenen. Man kommt zu einer neuen Menge, welche ebenfalls diese Eigenschaft u besitzt und in welcher die Koordinaten der Punkte zwischen a_2, a_2'; b_2, b_2'; c_2, c_2' liegen; u. s. w.

Die Gröfsen $a, a_1, a_2, \ldots$ nehmen, wenn sie sich ändern, zu, die Gröfsen $a', a_1', a_2', \ldots$ dagegen nehmen ab und, weil die Differenzen $a' - a$, $a_1' - a_1$, $a_2' - a_2, \ldots$ beliebig klein werden, so konvergieren die a und a' gegen eine gemeinsame Grenze x_0; ebenso konvergieren die Gröfsen $b, b_1, b_2, \ldots$ und $b', b_1', b_2', \ldots$ gegen die nämliche Grenze y_0 und die $c, c_1, c_2, \ldots$ und $c', c_1', c_2', \ldots$ gegen z_0. Wir behaupten: der Punkt P mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 besitzt die angegebene Eigenschaft. Denn: man setze k willkürlich fest und bestimme n so grofs, dafs alle Punkte, deren Koordinaten zwischen a_n, a_n'; b_n, b_n'; c_n, c_n' liegen, von P um weniger als k

abstehen (dazu braucht man n nur derart zu nehmen, dafs die Differenzen $x_0 - a_n$, $a_n' - x_0$; $y_0 - b_n$; $b_n' - y_0$; $z_0 - c_n$, $c_n' - z_0$, die Null zur Grenze haben, kleiner als $k/3$ sind). Alsdann enthält die Kugel mit dem Centrum (x_0, y_0, z_0) und dem Radius k den Teil von s, der in dem Parallelepipedon $(a_n \mapsto a_n', b_n \mapsto b_n', c_n \mapsto c_n')$ enthalten ist. Dieses besitzt aber die Eigenschaft u. Mithin hat auch die Kugel die Eigenschaft u. Weil ferner jede Kugel mit dem Centrum (x_0, y_0, z_0) Punkte des Systems s enthält, so gehört der Punkt (x_0, y_0, z_0) der Cs an.

§ 12. Wir werden oft Gelegenheit haben, das Cantor'sche Theorem anzuwenden; für jetzt beschränken wir uns auf ein Beispiel.

Es sei s eine Klasse unendlich vieler Punkte; sie sei begrenzt, d. h. $\mathrm{l'm}\, s \varepsilon \mathrm{Q}$. Die Eigenschaft, dafs die Menge c unendlich viele Punkte von s enthält, ist alsdann eine distributive; die gegebene Menge s hat nach der Voraussetzung die Eigenschaft, unendlich viele Punkte zu enthalten und begrenzt zu sein; daher mufs wenigstens ein Punkt von solcher Beschaffenheit existieren, dafs in jeder seiner Umgebungen unendlich viele Punkte des Systemes s existieren. Mit anderen Worten: *Es existiert immer das derivierte System einer Klasse s, wenn diese unendlich viele Punkte enthält und begrenzt ist.* Oder: *Wenn ein System von unendlich vielen Punkten keine derivierte Klasse hat, so ist das System unbegrenzt.* Oder auch: *In einem begrenzten System unendlich vieler Punkte kann der Abstand zweier Punkte bei dem Variieren derselben beliebig klein werden.*

§ 13. In diesem und dem folgenden Paragraphen wollen wir einige Umformungen des Cantor'schen Theorems vornehmen, von denen wir jedoch später keinen Gebrauch machen werden.

Es können Eigenschaften u der Punktmengen $(u \varepsilon \mathrm{KKq}_n)$ vorkommen, welche nur die erste der Bedingungen der distributiven Eigenschaften, § 10, (2), erfüllen, nämlich

$$c \cup c' \varepsilon u \,.\, \supset .\, (c \varepsilon u) \cup (c' \varepsilon u),$$

d. h.: wenn die Gesamtmenge $c \cup c'$ die Eigenschaft u hat, so hat wenigstens einer ihrer Teile c oder c' die Eigenschaft u. Eine solche Eigenschaft u kann man *halbdistributiv* nennen.

Alsdann ist die Eigenschaft: „die Menge c enthält eine Menge, welche die Eigenschaft u hat", distributiv und der Cantor-sche Satz wird:

Wenn u eine halbdistributive Eigenschaft der Punktmengen ist und wenn eine begrenzte Klasse s die Eigenschaft u besitzt, alsdann existiert ein Punkt x der geschlossen gemachten Menge derart, dafs jede Kugel mit dem Centrum x Mengen enthält, welche die Eigenschaft u haben.

Es sei z. B. f ein q/q_n, d. h. f sei eine reelle Funktion von n reellen Variabelen; man setze der Einfachheit wegen $n = 3$ voraus; es möge also $f(x, y, z)$ eine reelle Funktion der drei reellen Variabelen x, y, z sein. l sei ferner die endliche oder unendlich grofse obere Grenze der Werte von f, wenn das Tripel (x, y, z) derart variiert, dafs der Punkt, welcher diese Koordinaten hat, eine gewisse Figur c beschreibt. Alsdann ist folgende Eigenschaft halbdistributiv:

„l ist die obere Grenze der Werte, welche $f(x, y, z)$ annimmt, wenn der Punkt (x, y, z) in der Menge c variiert.“

Denn, zerlegt man c in zwei Teile c' und c'', so ist in einem von diesen die obere Grenze der Werte von f wieder l. Also giebt es einen Punkt (x_0, y_0, z_0) der geschlossen gemachten Menge s von der Beschaffenheit, dafs jede Kugel mit dem Centrum (x_0, y_0, z_0) Mengen enthält, die Teile von s sind und in denen die obere Grenze der Funktion f wieder l ist:

$$s \varepsilon \mathrm{K} \mathrm{q}_n \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m} s \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, f \varepsilon q \mathrm{f} s \,.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, x_0 \varepsilon C s : k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_k$$
$$\mathrm{l}' f(s \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\, \Theta k)) = \mathrm{l}' f(s) : \sim =_{x_0} \Lambda.$$

f sei ferner eine kontinuierliche oder diskontinuierliche in einem Intervall definierte reelle Funktion. Wir wollen sagen: „die Funktion f wechsele an den Enden des Intervalls $a \vdash b$ das Vorzeichen“ statt „$f(a) \times f(b) \leqq 0$“, d. h. also anstatt zu sagen: „die Werte $f(a)$ und $f(b)$ hätten entweder verschiedene Vorzeichen oder einer von ihnen sei Null“. Alsdann ist die Eigenschaft: „die Funktion f wechselt das Vorzeichen an den Enden des Intervalls $a \vdash b$“, eine halbdistributive Eigenschaft des Intervalls, weil bei der Zerlegung des letzteren in zwei Teile $a \vdash c$ und $c \vdash b$, wenn $f(a) \times f(b) \leqq 0$ ist, entweder $f(a) \times f(c) \leqq 0$ oder $f(c) \times f(b) \leqq 0$ sein mufs. Wenn daher die Funktion $f(x)$ an den Enden des Intervalls $a \vdash b$ das Vorzeichen ändert, so läfst sich ein Punkt x_0 dieses Intervalls in der Art finden, dafs sich in jeder seiner Umgebungen immer Intervalle bestimmen lassen, an deren Enden die Funktion das Vorzeichen wechselt. Wenn die $f(x)$ kontinuierlich ist, so wird $f(x_0) = 0$.

§ 14. Manchmal kommen Eigenschaften vor, welche die Negationen der distributiven Eigenschaften sind. Eine solche Eigenschaft heifst *antidistributiv*. Es sei u eine antidistributive Eigenschaft. Alsdann ist das Nichtvorhandensein der Eigenschaft u eine distributive Eigenschaft der Klasse c; man erhält mithin durch Substitution in die Definitionsformel (1) in § 9

(1) $$c \cup c' \sim \varepsilon u \,.=.\, (c \sim \varepsilon u) \cup (c' \sim \varepsilon u)$$

oder, wenn man beide Seiten negativ nimmt,

(2) $$c \cup c' \varepsilon u \,.=.\, c \varepsilon u \,.\, c' \varepsilon u.$$

Die Behauptung, u sei eine antidistributive Eigenschaft, ist gleichbedeutend mit der Behauptung, dafs, wenn eine Menge $c \cup c'$ die Eigenschaft u habe, jeder ihrer Teile c und c' dieselbe Eigenschaft besitze, und umgekehrt, wenn zwei Teilmengen c und c' die Eigenschaft u besitzen, dafs dann auch ihre Gesamtheit die nämliche Eigenschaft hätte.

Zum Beispiel: Weil das Unbegrenztsein einer Klasse eine distributive Eigenschaft ist, so mufs das Begrenztsein einer Klasse eine antidistributive sein. Die Eigenschaft einer Funktion $f(x)$, in einem Intervall $a \vdash b$ integrierbar zu sein, ist eine antidistributive des Intervalls. Dafs sämtliche Terme einer Reihe von variabelen Gliedern in einem Intervall integrierbar sind, ist ebenfalls eine antidistributive Eigenschaft dieses Intervalls.

u sei eine antidistributive Eigenschaft; alsdann ist $s \sim \varepsilon u$ eine distributive, und man erhält, wenn das Theorem Cantor's auf sie angewendet wird:

$$\begin{aligned}(3)\qquad & s \sim \varepsilon u \,.\, 1'\mathrm{m} s \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \therefore x \varepsilon C s : k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_k \\ & x + \overline{\mathrm{m}} \Theta k \sim \varepsilon u : \sim =_x \Lambda.\end{aligned}$$

Bringt man die Hypothese $s \varepsilon u$ auf die rechte Seite, die ganze Thesis auf die linke und macht die nötigen Umformungen, so ergiebt sich:

$$(4)\quad 1'\mathrm{m} s \varepsilon \mathrm{Q} \therefore x \varepsilon C s \,.\, \supset_x : k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, x + \overline{\mathrm{m}} \Theta k \varepsilon u \,.\, \sim =_k \Lambda \therefore \supset \,.\, s \varepsilon u.$$

Wenn u eine antidistributive Eigenschaft der Punktmengen ist und s eine begrenzte Punktmenge und wenn sich immer, wie man auch einen Punkt x in der geschlossen gemachten Menge s annehmen mag, eine Kugel mit dem Centrum x bestimmen läfst, welche die Eigenschaft u hat, alsdann besitzt die ganze Menge s die Eigenschaft u.

In den vorstehenden Sätzen wurde von Kugeln gesprochen, welche zum Centrum den Punkt x haben; es ist selbstverständlich, dafs man sie durch Parallelepipeda oder beliebige andere Figuren ersetzen kann, die den Punkt x in ihrem Innern enthalten.

Der letzte Satz läfst sich noch umformen, wenn man die unendlich kleinen Mengen einführt. Wir wollen uns eine Vorstellung von einer unendlich kleinen Menge in der Art machen, dafs wir uns eine Menge denken, deren Punkte sehr nahe aneinander liegen, oder eine variabele Menge, deren sämtliche Punkte einem festen Punkt zustreben. Den unendlich kleinen Mengen werden wir in der Folge eine Reihe von Eigenschaften beilegen, die sich aus den Eigenschaften der endlichen Menge durch Übergang zur Grenze ergeben. Vor der Hand teilen wir der unendlich kleinen Menge in dem gewöhnlichen Raum drei Koordinaten (x, y, z) zu, die ihre Lage im Raum bestimmen. Was eine unendlich kleine Menge ist, wird nicht definiert werden, jedoch sollen die Sätze definiert werden, in denen ein solcher Ausdruck vorkommt.

Unter u eine antidistributive Eigenschaft verstanden, wollen wir statt: „es läſst sich eine Umgebung des Punktes (x, y, z), d. h. eine Kugel mit dem Centrum (x, y, z) bestimmen, welche die Eigenschaft u hat“, sagen: „die unendlich kleine Menge mit den Koordinaten (x, y, z) hat die Eigenschaft u“. Alsdann erhält der letzte Satz die Form:

Versteht man unter u eine antidistributive Eigenschaft und ist die Menge s begrenzt und geschlossen, so besitzt, wenn jede unendlich kleine in s enthaltene Menge die Eigenschaft u hat, die ganze Menge s die Eigenschaft u.

Die Grenzen.

§ 15. Wir wollen nunmehr Komplexe von beliebiger Ordnung m, die Funktionen von Komplexen von beliebiger Ordnung n sind, d. h. $q_m f q_n$ betrachten. Einen speziellen Fall bilden die $q_m f q$, d. h. die Komplexe von beliebiger Ordnung, welche Funktionen einer numerischen Variabelen sind, also Systeme von m reellen Funktionen einer reellen Variabelen. Wird der Komplex durch einen Punkt dargestellt, so erhält man einen Punkt, dessen Lage im Raum von einer numerischen Variabelen abhängt und welcher eine Linie beschreibt. Analog sind dann die $q_m f q_2$, $q_m f q_3$ zu untersuchen, oder Punkte, deren Lage von zwei oder drei numerischen Variabelen abhängt. Ein anderer spezieller Fall ist durch die $q f q_n$ gegeben, d. h. durch eine reelle Funktion von n reellen Variabelen.

Eine Funktion kann für alle Systeme von Werten der unabhängigen Variabelen gegeben sein oder auch für Systeme von Werten, die auf verschiedene Art beschränkt sein können.

So ist z. B. die Funktion

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

worin a, b und c Konstante sind, für alle Paare von Werten gegeben, die man x und y zulegen kann. Dagegen ist die Funktion

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

worin unter dem Wurzelzeichen die arithmetische Wurzel aus dem Radikanden verstanden wird, nur für die Paare von Werten der x und y definiert, welche die Bedingung $1 \geq x^2 + y^2$ erfüllen. Sie wird durch die Punkte des Kreises dargestellt, dessen Centrum im Koordinatenanfang liegt und dessen Radius 1 ist. Die Funktion

$$u = \frac{(x + y)!}{x!\, y!}$$

wird durch die Algebra nur für Werte von x und y definiert, die ganze und positive Zahlen sind.

§ 16. Es sei u ein System komplexer Zahlen von der Ordnung n, und f ein $\mathrm{q}_m f u$, d. h. $f(x)$ ein Komplex von der Ordnung m, welcher eine Funktion des Komplexes x ist, die für alle Werte von x in dem System u definiert ist. Es sei ferner x_0 ein Punkt des derivierten Komplexes von u, d. h. ein Punkt, der dem u entweder angehört oder nicht, jedenfalls aber derart ist, dafs in jeder seiner Umgebungen unendlich viele Punkte von u existieren. Wir wollen die Grenze definieren, gegen die $f(x)$ konvergiert, wenn der variabele Punkt x, in dem System u variierend, gegen x_0 konvergiert; diese Grenze bezeichnen wir mit $\mathrm{Lim}_{x, u, x_0} f(x)$ oder mit $\mathrm{Lim}\, f(x)$.

Es sei a ein q_m.

Wenn man sagt, a sei ein Grenzpunkt von $f(x)$ für ein x, welches, in u variierend, gegen x_0 konvergiert, so heifst dies: Sind h und k beliebig gewählte positive Zahlen und durchläuft x alle Punkte der Klasse u, die von x_0 verschieden und von diesem weniger als h entfernt sind, so giebt es unter den zugehörigen Werten $f(x)$ immer solche, für welche $\mathrm{m}[f(x) - a] < k$ ist.

In Symbolen:

$$(1) \qquad u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u \,.\, a \varepsilon \mathrm{q}_m : \supset \therefore$$
$$a \varepsilon\, \mathrm{Lim}_{x, u, x_0} f(x) \,.\, = : h,\ k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_{h,k} .$$
$$f[u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h) \frown \sim \iota x_0] \frown (a + \overline{\mathrm{m}}\Theta k) \sim = \Lambda .$$

Die Definition läfst sich in die folgende umformen:

$$(2) \qquad a \varepsilon\, \mathrm{Lim}_{x, u, x_0} f(x) \,.\, = : h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h .$$
$$a \varepsilon C f [u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h) \frown \sim \iota x_0] .$$

Wenn man sagt, a sei ein Grenzpunkt von $f(x)$, so heifst dies: wie man auch den Radius h festsetzen möge, der Punkt a gehört immer der geschlossen gemachten Klasse an, die aus den Werten besteht, welche $f(x)$ annimmt, wenn x in u in der Kugel mit dem Centrum x_0 und dem Radius h variiert, ohne jemals mit x_0 zusammen zu fallen.

Aus dieser Definition ergiebt sich, dafs die Grenze einer Funktion $f(x)$ bei der Annäherung des x an x_0 mit $f(x_0)$, d. h. mit dem Wert der $f(x)$ für $x = x_0$ nichts zu thun hat; denn die Grenze von $f(x)$ hängt nur von den Werten der Funktion $f(x)$ in den Umgebungen von x_0 ab; der Variabelen x wird aber niemals der Wert x_0 beigelegt. Wollte man diese Bedingung nicht stellen, so würde der den verschiedenen $Cf[u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h)]$ — d. h. den geschlossen gemachten Klassen, die aus den Werten von $f(x)$ gebildet sind, wenn x in u in der Kugel mit dem Centrum x_0 und dem Radius h variiert — gemeinsame Teil aus der Klasse $\mathrm{lim}_{x, u, x_0} f(x)$ bestehen, welcher der Punkt $f(x_0)$ hinzugefügt ist.

Unter den Grenzwerten einer Funktion $f(x)$ kann auch das Unendlichgrofse auftreten:

$$\infty \, \varepsilon \, \mathrm{Lim}_{x, u, x_0} f(x) \, . = :$$

$$h \varepsilon \mathrm{Q} \, . \supset_h . \, \mathrm{l'mf} \, [u \frown (x_0 + \bar{\mathrm{m}} \Theta h)] = \infty . \tag{3}$$

Man sagt, unendlich sei ein Grenzpunkt von $f(x)$, falls x in u variierend gegen x_0 konvergiert, wenn die obere Grenze der Moduli der Werte, welche $f(x)$ in der Umgebung des Punktes x_0 annimmt, unendlich grofs ist.

§ 17. *Theorem I. Legt man den u, x_0 und f dieselbe Bedeutung wie zuvor bei und ist v eine begrenzte Klasse von q_m und so beschaffen, dafs in der Umgebung von x_0 die Funktion $f(x)$ immer Werte annimmt, die in v enthalten sind, alsdann enthält die geschlossen gemachte Klasse v bei der Annäherung von x an x_0 Grenzpunkte von $f(x)$:*

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \, . \, x_0 \varepsilon D u \, . \, f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u \, . \, v \varepsilon \mathrm{Kq}_m \, . \, \mathrm{l'm} v \varepsilon \mathrm{Q} : h \varepsilon \mathrm{Q} \, . \supset_h .$$

$$f[u \frown (x_0 + \bar{\mathrm{m}} \Theta h) \frown \sim \iota x_0] \frown v \sim = \Lambda : \supset . \, [\mathrm{Lim}_{x, u, x_0} f(x)] \frown C v \sim = \Lambda .$$

Die Eigenschaft: „die Menge v enthält Werte, welche $f(x)$ in der Umgebung von x_0 annimmt“ ist eine distributive. Zerlegt man nämlich v in die beiden Teile v_1 und v_2, so dafs $v = v_1 \cup v_2$, und hat einer von ihnen, z. B. v_1, die Eigenschaft, Werte zu enthalten, welche $f(x)$ in jeder Umgebung von x_0 annimmt, so kommt auch v die nämliche Eigenschaft zu, und umgekehrt: wenn keine der beiden Mengen diese Eigenschaft besitzt, d. h. wenn man eine Kugel vom Centrum x_0 und Radius h_1 derart bestimmen kann, dafs kein Wert, den $f(x)$ annimmt, wenn x in dieser Kugel variiert, ein v_1 ist, und wenn man eine andere Kugel mit demselben Centrum und dem Radius h_2 derart bestimmen kann, dafs kein von der Funktion in dieser anderen Kugel angenommener Wert ein v_2 ist, so enthält $v_1 \cup v_2 = v$, falls man unter h den kleineren der Radien h_1 und h_2 versteht, keinen der Werte, welche $f(x)$ in der Kugel mit dem Centrum x_0 und dem Radius h annimmt. Man kann daher nach dem Cantor'schen Theorem wenigstens einen Punkt a von Cv derart bestimmen, dafs bei willkürlich festgesetztem Radius k die Kugel mit dem Centrum a und dem Radius k Werte enthält, welche $f(x)$ in jeder Umgebung von x_0 annimmt; das heifst aber, a ist ein Grenzpunkt von $f(x)$, wenn x gegen x_0 konvergiert.

Theorem II. Wenn sich — unter Beibehaltung derselben Bezeichnung — eine positive Zahl k derart bestimmen läfst, dafs die Funktion $f(x)$ in jeder Umgebung von x_0 immer Werte annimmt, deren Modul nicht gröfser als k ist, so existieren für $x = x_0$ endliche Grenzwerte von $f(x)$.

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m fu \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} : h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h \,.$$
$$f[u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h) \frown \sim \iota x_0] \frown \overline{\mathrm{m}}\Theta k \sim = \Lambda : \supset .$$
$$\mathrm{q}_m \frown \mathrm{Lim}_{x,u,x_0} f(x) \sim = \Lambda .$$

Denn die Kugel vom Radius k, deren Centrum im Koordinatenanfang liegt, ist eine begrenzte Klasse und derart, dafs die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 immer Werte annimmt, die in dieser Kugel enthalten sind. Nach dem vorigen Satz mufs diese Kugel daher Grenzpunkte von $f(x)$ enthalten.

Theorem III. Behält man dieselbe Bezeichnung bei, so existieren immer Grenzwerte von $f(x)$:

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m fu \,.\, \supset \,.\, \mathrm{Lim}_{x,y,x_0} f(x) \sim = \Lambda .$$

Denn man kann entweder k so bestimmen, dafs die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 Werte annimmt, deren Modul nicht gröfser als k ist — ein Fall, in welchem $f(x)$ endliche Grenzwerte hat — oder $f(x)$ nimmt in der Umgebung von x_0 Werte an, deren Modul beliebig grofs ist — ein Fall, in welchem unendlich ein Grenzwert von $f(x)$ ist.

Theorem IV. Haben u, x_0, f die gewöhnliche Bedeutung und ist v eine begrenzte Klasse von q_m und läfst sich ferner eine solche Umgebung von x_0 bestimmen, dafs alle Werte, welche $f(x)$ in dieser Umgebung annimmt, in v enthalten sind, alsdann enthält die geschlossen gemachte Klasse alle Grenzwerte von $f(x)$.

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m fu \,.\, v \varepsilon \mathrm{Kq}_m \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m} v \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.$$
$$f[u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h) \sim \iota x_0] \supset v \,.\, \supset \,.\, \mathrm{Lim}_{x,u,x_0} f(x) \supset Cv.$$

Denn es sei h, wie wir schon in Symbolen geschrieben haben, ein solcher Radius der Kugel vom Centrum x_0, dafs die Werte, welche $f(x)$ annimmt, wenn x in dem in dieser Kugel enthaltenen Teil der Klasse u variiert, ohne mit x_0 zusammenzufallen, sämtlich in v enthalten sind. Alsdann mufs, weil die Klasse v begrenzt ist, auch die Klasse der Werte, die $f(x)$ in der Umgebung von x_0 annimmt, begrenzt sein. Mithin ist ∞ kein Grenzwert von $f(x)$ und alle Grenzwerte von $f(x)$ sind endlich. Es sei a ein Grenzwert von $f(x)$. Alsdann mufs der Abstand zwischen a und der Klasse der von $f(x)$ angenommenen Werte, d. h. der Klasse

$$f[u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h) \sim \iota x_0]$$

null sein, um so mehr also der Abstand zwischen a und der Klasse v, welche die vorstehende Klasse enthält; d. h. $a \varepsilon Cv$.

Theorem V. Wenn der Komplex a ein Grenzwert von $f(x)$ *ist, so mufs* 0 *ein Grenzwert von* mod $[f(x) - a]$ *sein, und umgekehrt:*

$$a \varepsilon \operatorname{Lim} f(x) . = . 0 \varepsilon \operatorname{Lim} \operatorname{mod} [f(x) - a].$$

Theorem VI. Wenn ∞ *ein Grenzwert von* $f(x)$ *ist, so mufs* ∞ *ein Grenzwert von* mod $f(x)$ *sein, und umgekehrt:*

$$\infty \varepsilon \operatorname{Lim} f(x) . = . \infty \varepsilon \operatorname{Lim} \operatorname{mod} f(x).$$

Die beiden Sätze ergeben sich aus der Definition der Grenze.

§ 18. Die Grenzwerte von $f(x)$ bilden bei der Annäherung des x an x_0 im allgemeinen eine Klasse, die, wie eben bewiesen wurde, immer existiert. Von Interesse ist der Fall, in dem $f(x)$ einen einzigen endlichen oder unendlich grofsen Grenzwert hat. Um auszudrücken, dafs a dieser Grenzwert sei, wollen wir schreiben $a = \lim f(x)$ und lesen: a ist *die* Grenze von $f(x)$.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, in welchem diese Grenze ∞ ist.

Theorem I. Benutzt man wieder die früheren Bezeichnungen, so bedeutet der Ausspruch, die Funktion $f(x)$ *habe bei der Annäherung des* x *an* x_0 ∞ *zum Grenzwert (d. h. das zum alleinigen Grenzwert) dasselbe, wie: Wenn man willkürlich eine beliebig grofse positive Zahl* k *festsetzt, so läfst sich eine Kugel vom Centrum* x_0 *und passendem Radius* h *derart bestimmen, dafs die von* $f(x)$ *in dieser Kugel angenommenen Werte mit Ausnahme des Centrums sämtlich einen Modul haben, der gröfser als* k *ist:*

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n . x_0 \varepsilon Du . f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u . \supset ::$$
$$\infty = \lim_{x, u, x_0} f(x) . = .\because . k \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_k : h \varepsilon \mathrm{Q} .$$
$$\mathrm{m} f [u \frown (x_0 + \Theta \overline{\mathrm{m}} h) \frown \sim \iota x_0] \supset k + \mathrm{Q} . \sim =_h \Lambda .$$

Dieser Satz ergiebt sich aus Theorem II des vorigen Paragraphen, wenn man beide Seiten negativ nimmt.

Theorem II. Behält man dieselben Bezeichnungen bei, so bedeutet der Satz, $f(x)$ *habe als (einzigen) Grenzwert den endlichen Wert* a*, soviel wie: Setzt man willkürlich eine beliebig kleine positive Zahl* k *fest, so läfst sich eine Zahl* $h > 0$ *so bestimmen, dafs, wenn man dem* x *einen beliebigen in* u *enthaltenen Wert beilegt, der sich von* x_0 *um eine Zahl unterscheidet, deren Modul kleiner als* h *ist, alsdann die Differenz zwischen dem entsprechenden Wert der Funktion* $f(x)$ *und* a *einen Modul hat, der kleiner als* k *ist. Oder auch: Setzt man* k *fest, so läfst sich eine Kugel vom Centrum* x_0 *und passendem Radius* h *so bestimmen, dafs für das in dieser Kugel variierende* x *die entsprechenden Werte von* $f(x)$ *sämtlich in der Kugel vom Centrum* a *und Radius* k *enthalten sind.*

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u \,.\, a \varepsilon \mathrm{q}_m \,.\, \supset ::$$
$$a = \lim_{x, u, x_0} f(x) \,.=.\!\cdot\!\cdot\, k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_k : h \varepsilon \mathrm{Q} \,.$$
$$f[u \cap (x_0 + \overline{\mathrm{m}} \Theta h) \dot{\sim} \iota x_0] \supset a + \overline{\mathrm{m}} \Theta k \,.\, \sim =_h \Lambda .$$

Denn, wenn sich, wie man auch k festsetze, eine Umgebung von x_0 so bestimmen läſst, daſs alle Werte von $f(x)$ in dieser Umgebung in der Kugel vom Centrum a und Radius k enthalten sind, so muſs die Grenze von $f(x)$ in der Kugel vom Centrum a und Radius k inbegriffen sein; und da dies für jeden beliebigen Radius k gilt, so folgt, daſs a der (alleinige) Grenzwert von $f(x)$ ist.

Wir wollen umgekehrt annehmen, man habe k festgesetzt und in jeder Umgebung von x_0 existierten Werte der $f(x)$ auſserhalb der Kugel mit dem Centrum a und dem Radius k. Wenn in jeder Umgebung von x_0 die obere Grenze der Werte des Moduls der $f(x)$ unendlich groſs ist, alsdann ist ∞ ein weiterer Grenzwert von $f(x)$. Wenn dagegen in einer passenden Umgebung von x_0 die obere Grenze der Moduln von $f(x)$ einen endlichen Wert l hat, so nimmt die Funktion $f(x)$ in jeder Umgebung von x_0 Werte an, die durch Punkte dargestellt werden, welche auſserhalb der Kugel vom Centrum a und Radius k und innerhalb der Kugel liegen, deren Centrum der Koordinatenanfang und deren Radius l ist. Mithin existieren in dem zwischen den beiden Kugeloberflächen befindlichen Raumteil Grenzpunkte von $f(x)$, die von a verschieden sind. Dies bedeutet, daſs sich, wenn a der alleinige Grenzwert von $f(x)$ ist und wenn k festgesetzt wurde, eine Umgebung von x_0 derart bestimmen läſst, daſs alle Werte, welche $f(x)$ in dieser Umgebung annimmt, in der Kugel vom Centrum a und Radius k enthalten sind.

Es folgt unmittelbar:

Theorem III. Unter denselben Voraussetzungen ist die Behauptung, ∞ sei die Grenze von $f(x)$, gleichbedeutend mit: ∞ ist die Grenze des mod $f(x)$:

$$\infty = \lim f(x) \,.=.\, \infty = \lim \operatorname{mod} f(x);$$

und, wenn man sagt, der endliche Wert a sei die Grenze von $f(x)$, so ist dies gleichwertig mit: 0 ist die Grenze des mod $[f(x) - a]$:

$$a = \lim f(x) \,.=.\, 0 = \lim \operatorname{mod} [f(x) - a].$$

Theorem IV. Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Variabele sind, so ist die Angabe, der Komplex $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ habe zur Grenze den Komplex $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ äquivalent mit: x_1 hat zur Grenze a_1, x_2 hat zur Grenze $a_2, \ldots, x_n$ hat zur Grenze a_n.

Denn, setzt man $\lim (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, so bedeutet dies

(1) $\lim \operatorname{mod}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) = 0$

oder

(2) $\lim \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} = 0.$

Wenn dies der Fall ist, so mufs jede der Differenzen $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2, \ldots$, weil sie ihrem absoluten Wert nach kleiner als der in Rede stehende Modul ist, gegen Null konvergieren; und umgekehrt, wenn jede dieser Differenzen gegen Null konvergiert, so besteht die Beziehung (2); demnach geht (2) über in:

$$\lim (x_1 - a_1) = 0, \ \lim (x_2 - a_2) = 0, \ldots, \lim (x_n - a_n) = 0;$$

oder

$$\lim x_1 = a_1, \ \lim x_2 = a_2, \ \ldots, \ \lim x_n = a_n.$$

§ 19. *Theorem. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs $f(x)$ bei der Annäherung des x an x_0 einer einzigen bestimmten und endlichen Grenze zustrebe, besteht darin, dafs sich nach willkürlicher Festsetzung einer Gröfse $k > 0$ eine Umgebung von x_0 derart bestimmen lasse, dafs die Differenz zwischen zwei beliebigen Werten, welche $f(x)$ in dieser Umgebung annimmt, konstant kleiner als k ist:*

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u \,.\, \supset .\because.$$

$$\lim_{x,u,x_0} f(x) \varepsilon \mathrm{q}_m \,. =:: k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_k .\because. h \varepsilon \mathrm{Q} : x_1, x_2 \varepsilon u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}} \Theta h)$$

$$\sim \iota x_0 \,.\, \supset_{x_1, x_2} .\, \mathrm{m}\,[f(x_1) - f(x_2)] < k : \sim =_h \Lambda.$$

Denn, wenn $f(x)$ gegen eine endliche Grenze a konvergiert, so läfst sich nach dem vorigen Satz eine Umgebung von x_0 derart bestimmen, dafs der Wert von $f(x)$ für jeden beliebigen Wert, den man x in dieser Umgebung beilegen kann, sich von a absolut um weniger als $k/2$ unterscheidet; legt man folglich dem x zwei Werte x_1 und x_2 in dieser Umgebung bei, so unterscheiden sich $f(x_1)$ und $f(x_2)$ von a um weniger als $k/2$ und voneinander mithin um weniger als k.

Wenn sich umgekehrt eine Umgebung von x_0 derart bestimmen läfst, dafs die Differenz $f(x) - f(x_1)$, wenn man der Variabelen diese beiden Werte x_1 und x in der Umgebung zulegt, ihrem absoluten Wert nach kleiner als k ist, so folgt daraus, dafs $f(x)$ in der Kugel vom Centrum x_1 und Radius k enthalten ist; mithin ist ihre Grenzfigur in derselben Kugel enthalten. Da man aber k beliebig annehmen kann, so reduziert sich diese Grenzfigur, die in einer Kugel mit beliebig kleinem Radius enthalten ist, auf einen Punkt.

§ 20. Die Grenze $\lim_{x,y,x_0} f(x)$ hängt von der Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ ab, von dem Wert x_0, gegen den man die unabhängige Variabele x konvergieren läfst, und von der Klasse u der

Werte, die x beigelegt werden. Setzt man an die Stelle der Klasse u eine andere Klasse v, so kann sich die Grenze ändern. Selbstverständlich mufs x_0 ein Punkt der derivierten Klasse von u wie von v sein und die Funktion $f(x)$ mufs in der Klasse u wie in der Klasse v definiert sein; oder, nimmt man an

$$u, v \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, x_0 \varepsilon Dv \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f}(u \cup v),$$

so erhält man

$$u \supset v \,.\, \supset \,.\, \mathrm{Lim}_{x, u, x_0} f(x) \supset \mathrm{Lim}_{x, v, x_0} f(x).$$

Ist die Klasse u in der Klasse v enthalten, so ist jeder Grenzwert von $f(x)$, wenn x in u gegen x_0 konvergiert, auch ein Grenzwert von $f(x)$, wenn x in v variiert.

Folglich: *Hat $f(x)$, wenn x in v variierend gegen x_0 konvergiert, einen (einzigen) Grenzwert, so gilt dasselbe auch, wenn $f(x)$ in u variiert, und die beiden Grenzwerte fallen zusammen.*

§ 21. Mit der vorigen Frage hängt die folgende zusammen:

Es sei $z = f(x, y)$ eine reelle Funktion der beiden reellen Variabelen x und y. Legt man x einen beliebigen Wert bei, so wird $f(x, y)$ eine Funktion von y allein, und man kann von ihrer Grenze für $y = y_0$, $\mathrm{Lim}_{y=y_0} f(x, y)$ sprechen; nimmt man an, diese Grenze sei eine bestimmte und endliche Gröfse, so hängt sie von dem Wert ab, der x gegeben wurde, und man kann daher von ihrer Grenze bei der Annäherung von x an x_0 reden, die mit

(a) $$\mathrm{Lim}_{x=x_0} \mathrm{Lim}_{y=y_0} f(x, y)$$

bezeichnet wird. Vertauscht man die Stelle der beiden Variabelen x und y, so erhält man die andere Grenze

(b) $$\mathrm{Lim}_{y=y_0} \mathrm{Lim}_{x=x_0} f(x, y).$$

Schliefslich kann man eine Funktion zweier unabhängiger Variabelen $f(x, y)$ betrachten und das Paar (x, y) gegen das Paar (x_0, y_0) konvergieren lassen; man erhält so eine dritte Grenze

(c) $$\mathrm{Lim}_{x=x_0,\, y=y_0} f(x, y).$$

Wir haben schon gesehen, dafs die Grenzen (a) und (b) verschieden sein können. Man erkennt auch leicht, dafs jeder Grenzwert von $f(x, y)$, wenn man die Grenze auf die Art (a) ermittelt, auch ein Grenzwert in dem Sinn (c) ist; und ebenso ist jeder Grenzwert in Folge der Operation (b) auch ein Grenzwert im Sinn (c). Wenn folglich $f(x, y)$ als eine Funktion zweier unabhängiger Variabelen betrachtet wird und wenn sie bei der Annäherung von x an x_0 und von y an y_0 einem einzigen endlichen oder unendlich grofsen Grenzwert zustrebt, so ist dasselbe auch der Fall, wenn man zuerst bezüglich y, dann bezüglich x zur

Grenze übergeht oder zuerst bezüglich x und dann bezüglich y, und die drei Grenzen sind gleich.

§ 22. Es sei u eine begrenzte Kq_n und f eine $q_m f u$. Die Werte der Funktion f, welche den verschiedenen Punkten von u entsprechen, bilden eine Klasse von q_m, die mit $f(u)$ bezeichnet wird und die man *das Bild* der Figur u nennen kann.

Theorem I. Wenn u ein begrenztes System von Punkten ist und $f(x)$ einen Komplex von Ordnung m und eine Funktion der Punkte x in dem System u bedeutet und wenn die Klasse $f(u)$ unbegrenzt ist, alsdann kann man einen Punkt x_0 der derivierten Gruppe von u derart bestimmen, dafs ∞ einer der Grenzwerte von $f(x)$ ist, falls x in u variierend gegen x_0 konvergiert.

$$u \varepsilon Kq_n . 1'mu \varepsilon Q . f \varepsilon q_m f u . 1'mf(u) = \infty . \supset : x_0 \varepsilon Du .$$
$$\infty \varepsilon \operatorname{Lim}_{x, u, x_0} f(x) . \sim =_{x_0} \Lambda .$$

Denn zerlegt man die Menge u in zwei Teile u_1 und u_2, so ist es gleichbedeutend, ob man sagt, $f(u)$ sei unbegrenzt, oder ob man sagt, wenigstens eine der Mengen $f(u_1)$ und $f(u_2)$ sei unbegrenzt; d. h. die Eigenschaft „die Menge $f(u)$ ist unbegrenzt“ ist eine distributive Eigenschaft der Menge u; und da die Menge u diese Eigenschaft hat und begrenzt ist, so folgt aus dem Cantor'schen Theorem, dafs ein Punkt x_0 von Cu, d. h. der geschlossen gemachten Menge u existiert, so dafs in jeder Umgebung von x_0 die Werte, welche $f(x)$ annimmt, eine unbegrenzte Menge bilden. Folglich hat x_0 in seiner Umgebung unendlich viele Punkte von u, oder $x_0 \varepsilon Du$, und ∞ ist ein Grenzwert von $f(x)$, wenn x gegen x_0 konvergiert.

Theorem II. Wenn u eine begrenzte Punktmenge und $f(x)$ ein Komplex von der m^{ten} Ordnung und eine Funktion der Punkte x der Menge u ist und wenn a einen Punkt der derivierten Gruppe der $f(u)$ bezeichnet, so läfst sich ein Punkt x_0 von Du derart bestimmen, dafs a ein Grenzwert von $f(x)$ ist, falls x in u variierend gegen x_0 konvergiert.

$$u \varepsilon Kq_n . 1'mu \varepsilon Q . f \varepsilon q_m f u . a \varepsilon Df(u) . \supset :$$
$$x_0 \varepsilon Du . a \varepsilon \operatorname{Lim}_{x, u, x_0} f(x) . \sim =_{x_0} \Lambda .$$

Denn, wenn u_1 und u_2 zwei Mengen sind, so hat man

$$f(u_1 \cup u_2) = f(u_1) \cup f(u_2)$$

und also

$$Df(u_1 \cup u_2) = Df(u_1) \cup Df(u_2),$$

oder

$$a \varepsilon Df(u_1 \cup u_2) . = . a \varepsilon Df(u_1) . \cup . a \varepsilon Df(u_2).$$

Mithin ist die Eigenschaft: „a ist ein Punkt der derivierten Gruppe von $f(u)$“, eine distributive Eigenschaft der Menge u; es ist festgestellt, daſs die gegebene Menge u sie besitzt; folglich muſs nach dem Cantor'schen Satz ein solcher Punkt x_0 von Cu existieren, daſs a ein Punkt der derivierten Gruppe der Werte ist, welche $f(x)$ in jeder Umgebung von x_0 annimmt. x_0 muſs daher ein Punkt von Du sein, und a ein Grenzwert von $f(x)$, wenn x gegen x_0 konvergiert.

Die vorstehenden Beweise lassen sich verallgemeinern. Es sei c eine distributive Eigenschaft der Punktmengen. Alsdann ist die Eigenschaft: „die Menge $f(u)$, d. h. das Bild der Menge u, hat die distributive Eigenschaft c" eine distributive Eigenschaft der Menge u. Mithin folgt, weil „eine unbegrenzte Menge zu sein" eine distributive Eigenschaft ist, daſs „das Bild der unbegrenzten Menge u zu sein" eine distributive Eigenschaft der Menge u ist. Und weil die Eigenschaft, „daſs der Punkt a eine Menge unter den Punkten der derivierten Gruppe hat", distributiv ist, so schlieſsen wir, daſs auch die Eigenschaft „daſs der Punkt a das Bild von u zum Punkt der derivierten Gruppe hat", eine distributive Eigenschaft der Menge u ist.

§ 23. Es sei u eine Kq_n, x_0 ein Punkt von u von der Beschaffenheit, daſs in seiner Umgebung unendlich viele Punkte von u existieren, d. h. also, es sei x_0 ein Punkt von u und von Du. Ferner möge f ein $\mathrm{q}_m \mathrm{f} u$ sein, d. h. ein Komplex von m Variabelen, welcher eine in der Menge u definierte Funktion von n Variabelen ist. Man sagt, $f(x)$ sei für $x = x_0$ *kontinuierlich*, wenn $\lim_{x,u,x_0} f(x) = f(x_0)$ ist, d. h. wenn die Grenze von $f(x)$, wofern x, in der Klasse u variierend, sich dem Werte x_0 nähert, $f(x_0)$ ist. Man sagt $f(x)$ sei *diskontinuierlich*, wenn es nicht kontinuierlich ist, d. h., wenn es bei der Annäherung des x an x_0 nicht einer bestimmten Grenze zustrebt, oder einer bestimmten Grenze sich wohl nähert, die aber von $f(x_0)$ verschieden ist.

Wenn dagegen x_0 ein Punkt von u, nicht aber von Du ist, oder wenn es ein Punkt von Du, nicht aber von u ist, alsdann kann weder von Stetigkeit noch von Unstetigkeit die Rede sein.

Eine Menge u kann mit ihrer eigenen Derivierten zusammenfallen; sie heiſst dann *perfekt*. So sind z. B. eine Kugel $x_0 + \overline{\mathrm{m}}\Theta h$ mit dem Centrum x_0 und dem Radius h, ein beliebiges Polyeder, wenn man unter den Punkten des Polyeders sowohl die im Innern als die auf der Oberfläche versteht, etc. perfekte Mengen. Ein Intervall mit Einschluſs der Enden ist eine perfekte Menge. Eine geschlossene Menge ohne isolierte Punkte ist perfekt.

Wenn u eine perfekte Menge ist, d. h., wenn $Du = u$ ist und wenn $f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u$, so sagt man, f sei *in der ganzen Menge u kontinuierlich* und schreibt $f \varepsilon (\mathrm{q}_m \mathrm{f} u)$ contin., falls f für jeden Punkt von u kontinuierlich ist.

§ 24. *Theorem I. Wenn u eine begrenzte Menge vorstellt, $f(x)$ einen Komplex, der eine in dieser Menge definierte Funktion von x ist, und wenn k eine positive Gröfse von der Beschaffenheit bezeichnet, dafs sich, wie man auch die positive Gröfse h annehmen möge, immer zwei Punkte x_1 und x_2 von u bestimmen lassen, deren Abstand kleiner als h ist, und für welche die Differenz zwischen den entsprechenden Werten der Funktion $f(x_1) - f(x_2)$ ihrem absoluten Wert nach gröfser als k wird, alsdann existiert ein Punkt x_0 von Cu, in dessen Umgebung sich immer zwei Werte x_1 und x_2 bestimmen lassen, welche* mod $[f(x_1) - f(x_2)] > k$ *machen.*

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m} u \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}_m \mathrm{f} u \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\!\cdot\!.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h : x_1, x_2 \varepsilon u \,.$$
$$\mathrm{m}(x_1 - x_2) < h \,.\, \mathrm{m}[f(x_1) - f(x_2)] > k \,.\, \sim =_{x_1, x_2} \Lambda \,.\!\cdot\!.\, \supset ::$$
$$x_0 \varepsilon Cu \,.\!\cdot\!.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_h : x_1, x_2 \varepsilon u \frown (x_0 + \overline{\mathrm{m}} \Theta h) \,.$$
$$\mathrm{m}[f(x_1) - f(x_2)] > k \,.\, \sim =_{x_1, x_2} \Lambda \,.\!\cdot\!.\, \sim =_{x_0} \Lambda \,.$$

Denn die Eigenschaft der Menge c, welche durch den Satz ausgedrückt wird: „wie man auch die positive Gröfse h annehmen möge, es lassen sich zwei Punkte x_1 und x_2, von denen wenigstens einer der Menge c angehört und deren Abstand voneinander kleiner als h ist, derart bestimmen, dafs die Differenz der entsprechenden Werte von $f(x)$ ihrem absoluten Wert nach gröfser als k wird“, ist eine distributive Eigenschaft der Menge c. Daraus ergiebt sich bei Benutzung des Cantor'schen Theorems der obige Satz.

Wenn die Funktion $f(x)$ in der ganzen Menge u kontinuierlich ist und wenn wir, damit dies einen Sinn habe, die Menge u als perfekt voraussetzen, d. h. $u = Du$, alsdann läfst sich, wie man auch den Punkt x_0 in $u = Cu = Du$ annehmen möge, immer eine Umgebung von x_0 derart bestimmen, dafs der Unterschied zwischen zwei beliebigen Werten der Funktion in dieser Umgebung seinem absoluten Wert nach kleiner als k wird; mithin ist die Behauptung des vorigen Theorems nicht richtig; die Hypothese kann also nicht bestehen und es ergiebt sich:

Theorem II. Wenn u eine begrenzte und perfekte Menge ist und $f(x)$ eine für die Werte von x in der Menge u definierte und stetige Funktion, und wenn k eine positive, willkürlich kleine Gröfse bezeichnet, so läfst sich eine positive Gröfse h derart bestimmen, dafs, wie man auch die beiden Punkte x_1 und x_2 von u annehmen möge, wenn nur ihr Abstand von einander kleiner als h ist, die Differenz der entsprechenden Werte der Funktion ihrem absoluten Wert nach kleiner (nicht gröfser) als k ist.

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m} u \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, Du = u \,.\, f \varepsilon (\mathrm{q}_m \mathrm{f} u) \text{ contin. } k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\!\cdot\!.$$
$$h \varepsilon \mathrm{Q} : x_1, x_2 \varepsilon u \,.\, \mathrm{m}(x_1 - x_2) < h \,.\, \supset_{x_1, x_2} \,.$$
$$\mathrm{m}[f(x_1) - f(x_2)] \leqq k : \sim =_h \Lambda \,.$$

Die hier erklärte Eigenschaft der kontinuierlichen Funktionen in einer ganzen Menge heifst *gleichmäfsige Stetigkeit.* Der eben aufgestellte Satz deckt sich, wie man sieht, seinem Wesen nach mit dem vorigen, weil die Negation der gleichmäfsigen Stetigkeit eine distributive, die gleichmäfsige Stetigkeit aber eine antidistributive Eigenschaft ist.

Theorem III. Ist die Menge u begrenzt und perfekt und $f(x)$ ein Komplex und eine stetige Funktion von x in der Menge u, so ist die Menge, welche das Bild von u ist, d. h. $f(u)$, begrenzt und geschlossen; d. h. jeder Wert, welcher den Werten unendlich nahe liegt, die $f(x)$ bei dem Variieren von x in u annimmt, ist auch einer der Werte, die $f(x)$ annimmt.

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, \mathrm{l'm}\, u \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, Du = u \,.\, f\varepsilon(\mathrm{q}_m f u)\ \mathrm{contin.} \supset .$$
$$\mathrm{l'm} f(u) \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, Cf(u) = f(u).$$

Denn man setze das Unmögliche voraus, und lasse die Klasse $f(u)$ unbegrenzt sein; alsdann existiert nach Theorem I in § 22 ein solcher Wert x_0 von Du und mithin auch von u, dafs $f(x)$ bei der Annäherung von x an x_0 unter seinen Grenzwerten auch unendlich hat; auf der anderen Seite ist aber, da $f(x)$ stetig ist, die Grenze von $f(x)$ bei der Annäherung von x an x_0 die endliche Gröfse $f(x_0)$; mithin ist $f(u)$ begrenzt.

Man nehme ferner das Unmögliche, dafs a ein Punkt von $Cf(u)$ aber nicht von $f(u)$ sei, als möglich an; a mufs ein Punkt von Du sein, mithin existiert nach Theorem II in § 22 ein solcher Punkt x_0 von Du und daher auch von u, dafs $a \varepsilon \mathrm{Lim}_{x,u,x_0} f(x)$; diese Grenze ist aber $f(x_0)$, es mufs also $a = f(x_0)$ sein, d. h. aber, a ist im Widerspruch mit der Hypothese thatsächlich ein Wert, den $f(x)$ annimmt. Mithin ist jeder Punkt von $Cf(u)$ ein Punkt von $f(u)$.

Theorem IV. Wenn die Punktmenge u begrenzt und perfekt ist, und wenn $f(x)$ eine relle und in der Menge u definierte und stetige Funktion von x ist, so sind die obere und untere Grenze der Werte, die $f(x)$ annimmt, endlich und sind Werte, die $f(x)$ annimmt; d. h. $f(x)$ wird in der That in der Menge u zu einem Maximum und einem Minimum:

$$u \varepsilon \mathrm{Kq}_n \,.\, \mathrm{l'm}\, u \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, Du = u \,.\, f\varepsilon(\mathrm{q} f u)\ \mathrm{contin.} \supset .\ \mathrm{l'} f(u),\ \mathrm{l}_1 f(u)\ \varepsilon\, f(u).$$

Denn nach dem vorigen Theorem bilden die Werte, welche $f(x)$ erhält, ein begrenztes System von Zahlen; mithin sind die obere und untere Grenze dieses Zahlensystems endliche Zahlen. Sie sind ferner Werte von $Cf(u)$ und daher nach dem vorigen Theorem Werte von $f(u)$.

Sachregister.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern der einzelnen Artikel.)